Lineare algebraische Gruppen (Anhänge)

Vorlesung 2019 - 2020
Fakultät für Mathematik, Universität Leipzig
frei nach
T.A.Springer
Birkhäuser, Boston 1981
(zweite Auflage 1998)

Bezeichnungen

c(M)	Anzahl der Spalten einer Matrix (“columns”), vgl. A.3.1.1.
Char(k)	Charakteristik des Körpers k, vgl. 1.2.5
$\mathbf{D}_n$	Gruppe der nicht-singulären Diagonal-Matrizen, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (b).
D(f)	offene Hauptmenge zur Funktion f, vgl. 1.3.5.
$\dim_K M$	Dimension des Vektorraums M über dem Schiefkörper K, vgl. Bemerkung A.3.1.2 (iii).
Δ	gewöhnlich die Komultiplikation $k[G]\longrightarrow k[G]\otimes k[G]$ einer linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 2.1.2.
e	gewöhnlich die Einsabbildung $G\longrightarrow G$ einer algebraischen Gruppe G, vgl. vgl. Bemerkung 2.1.1.1 (vi), manchmal auch die Auswertungsabbildung im Einselement $k[G] \longrightarrow k$, $f \mapsto f(e)$, d.h. das als k-rationaler Punkt aufgefaßte neutrale Element der Gruppe, vgl. 2.1.2.
ε	gewöhnlich der von der Einsabbilung e induzierte k-Algebra-Homomorphismus $k[G]\longrightarrow k[G]$ einer linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 2.1.2.
$End_k(V)$	der k-linearen Endomorphismus $V \longrightarrow V$ des endlich-dimensionalen k-Vektorraums V, vgl. 2.4.1. Dieselbe Bezeichnung wird auch verwendet im Fall einer unendlichen Dimension von V , vgl. 2.4.7.
End(V)	$:= End_k(V)$, vgl. 2.4.1.
F	Teilkörper von k, vgl. 1.3.7.
F[X]	F-Struktur der algebraischen Menge X, vgl. 1.3.7
G^0	Komponente der Eins der algebraischen Gruppe G, vgl. 2.2.1.2.
$\mathbf{G}_a$	additive Gruppe, vgl. 2.1.4, Beispiel 1.
$\mathbf{G}_m$	multiplikative Gruppe, vgl. 2.1.4, Beispiel 2.
$\mathbf{GL}_1$	multiplikative Gruppe, vgl. 2.1.4, Beispiel 2.
$\mathbf{GL}_n$	allgemeine lineare Gruppe, vgl. 2.1.4, Beispiel 3.
GL(V)	allgemeine lineare Gruppe des endlich-dimensionalen k-Vektorraums V, Gruppe der linearen Automorophismen von V, vgl. 2.1.5 Aufgabe 1. Dieselbe Bezeichnung wird auch verwendet im Fall einer unendlichen Dimension von V , vgl. 2.4.7.
I(X)	Ideal der Polynome von k[T], welche in allen Punkten der Menge $X \subseteq k^n$ gleich Null sind, vgl. 1.1.1
$I_X(Y)$	Ideal der Funktionen aus dem Koordinatenring der algebraischen Menge X, welche auf der Teilmenge $Y \subseteq X$ identisch Null sind, vgl. 1.3.2.
i	gewöhnlich die Invertierungsabbildung $G\longrightarrow G$ einer algebraischen Gruppe G, vgl. 2.1.1.1.

ι — gewöhnlich der Antipode $k[G]\longrightarrow k[G]$ einer linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 2.1.2.

k — algebraisch abgeschlossener Körper, vgl. 1.1.1.

$k[T]$ — Polynomring über k in den Unbestimmten $T = T_1,\dots,T_n$, vgl. 1.1.1

$k[X]$ — affiner Koordinatenring der algebraischen Menge X, vgl. 1.3.1

L_g — Linkstranslation einer Gruppe mit dem Gruppen-Element g, vgl. 2.2.0 und 2.3.2 Beispiel 2.

$\mathbf{M}_n$ — Menge der n×n-Matrizen, vgl. 2.1.4 Beispiel 3.

M_x — das maximale Ideal der Funktionen des Koordinatenrings einer algebraischen Menge, welche im Punkt x gleich Null sind, vgl. 1.3.2

$M^{v'}_{v''}(\varphi)$ — Matrix der linearen Abbildung φ bezüglich der geordneten Basen v' und v" von Urbild bzw. Bildraum, vgl. Bemerkung A.3.1.2 (v).

$Mat_{m,n}(K)$ — Modul der m×n-Matrizen mit Einträgen aus dem Ring K, vgl. Bemerkung A.3.1.1 (ii).

$Mat_n(K)$ — Modul der n×n-Matrizen mit Einträgen aus dem Ring K, vgl. Bemerkung A.3.1.1 (iii).

μ — gewöhnlich die Multiplikationsabbildung $G\times G\longrightarrow G$ einer algebraischen Gruppe G, vgl. 2.1.1.1.

$\mathbf{O}_n$ — die orthogonale Gruppe, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (f).

$\mathcal{O}_X$ — Garbe der regulären Funktionen auf der algebraischen Menge X, vgl. 1.4.1.

$\mathcal{O}_X|_Y$ — Einschränkung der Garbe $\mathcal{O}_X$ auf den Unterraum Y von X, vgl. 1.4.2

$\mathcal{O}_{X,x}$ — lokaler Ring der algebraischen Menge X im Punkt $x\in X$, vgl. 1.4.3.

$\mathbf{Q}(R)$ — voller Quotientenring des Rings R, Quotientenkörper des Integritätsbereichs R, vgl. 1.4.4.

R_g — Rechtstranslation einer Gruppe mit dem Gruppen-Element g, vgl. 2.2.0 und 2.3.2 Beispiel 2.

$r(M)$ — Anzahl der Zeilen einer Matrix ("rows"), vgl. A.3.1.1.

s — der Gruppen-Homomorphismus $G \longrightarrow GL(k[X])$ zu einer Operation der linearen algebraischen Gruppe G auf einer affinen Varietät X, vgl. 2.3.5.

Specm(A) — maximales Spektrum der affinen k-Algebra A, vgl. 1.3.2.

$\mathbf{SL}_n$ — die spezielle lineare Gruppe, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (e).

$\mathbf{SO}_n$ — die spezielle orthogonale Gruppe, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (g).

$\mathbf{Sp}_{2n}$ — die symplektische Gruppe, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (h).

$\mathbf{T}_n$ — Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (c).

$T_A(M)$ — Tensoralgebra des A-Moduls M, vgl. A.2.2.

type(M) — Typ einer einer Matrix M, vgl. A.3.1.1.

$\mathbf{U}_n$ — Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (d).

$V(M)$ — Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus der Menge M, vlg. 1.1.1.

$V_X(I)$ — Menge der gemeinsamen Nullstellen der Funktionen des Ideals I des Koordinatenrings der algebraischen Menge X, vgl. 1.3.2.

$\sqrt{I}$ — Nil-Radikal des Ideals I, vgl. 1.1.1.

(H, K) Kommutator-Gruppe der Untergruppen H und K einer Gruppe, vgl. Bemerkung 2.1.1.1 (vii).

(f,g) Morphismus mit Werten in einem Produkt von Varietäten mit den Koordinaten-Morphismen f und g, vgl. 1.5.1.

(x,y) Kommutator zweier Elemente einer Gruppe, vgl. Bemerkung 2.1.1.1(vii).

[f] Keim der regulären Funktion, vgl. 1.4.3

$[x]=[x_0,...,x_n]$ Punkt mit den projektiven Koordinaten x_i, vlg. 1.7.1

$|i|$ Summe der Koordinaten des Tupels i (wenn i als Exponent eines Monoms in Multi-Index-Schreibweise vorkommmt), vgl. 1.7.3.

A_f Quotientenring des Rings A bezüglich der Potenzen des Elements $f \in A$, vgl. 1.4.6.

f* der auf den Schnitten (insbesondere den globalen Schnitten) der Strukturgarbe induzierte k-Algbra-Homomorphismus zum Morphismus f geometrischer Räume, vgl. 1.4.7.

$f^{\#}$ der durch den k-Algebra-Homomorphismus f induzierte Morphismus affiner k-Varieäten, vgl. Bemerkung 1.4.7 (v),

X(F) Menge der F-rationalen Punkte der algebraischen Menge X, vgl. 1.3.7.

$x^* = (x_0,...,x_n)^*$ Punkt mit den projektiven Koordinaten x_i, vlg. 1.7.1

Literatur

Azad, H.

[1] Structure constants of algebraic groups, Journal of Algebra 75 (1982),209-222.

Borel, A.

[1] Groups linéaires algébriques, Annals of Mathematics 64 (1956), 20-82

[2] Algebraic groups and related finite groups, Lecture Notes in Math. 131, 2. Aufl., Springer-Verlag 1986

[3] Linear algebraic groups, 2. Aufl., Graduate Texts in Math. 126, Springer-Verlag 1991.

Borel, A., Springer, T.A.

[1] Rationality properties of linear algebraic groups, Tôhoku Math. Journal 20 (1968), 443-497

Borel, A., Tits, J.

[1] Groupes réductifs, Publ. Math. IHES 27 (1965), 55-150; Complements, ibid. 41 (1972), 253-276

[2] Eléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs, Inventiones Mathematicae 12 (1971), 95-104

[3] Théoremes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 287 (1978), 55-57.

Bourbaki, N.

[1] Algèbre commutative, Hermann, Paris 1961-1965

[2] Groups et algèbres de Lie, Hermann, Paris 1971-1975

Bruhat, F.

[1] Représentations induites des groupes de Lie semi-simples connexes, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 138 (1954), 437-439.

Bruhat, F., Tits, J.

[1] Groupes réductifs sur un corps local, Ch. I, Publ. Math. IHES 41 (1972),5-251, Ch. II, ibid. 60 (1984), Ch. III, Journal Fac. Science University Tokyo 34 (1987), 671-698.

Carter, R.W.

[1] Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex representations, Wiley, 1985

Cartier, P.

[1] Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique, Bulletin Société Math. de France 86 (1958), 177-251.
Cernousov, V.I.
[1] The Hasse principle for groups of type E_8, Math. USSR Izv. 34 (1990), 409-423.
Chevalley, C.
[1] Théorie des groupes de Lie, vol. II, Groupes algébriques, Hermann, 1951.
[2] On algebraic group varieties, Journal Math. Soc. Japan 6 (1954), 303-324.
[3] Fondements de la géométrie algébrique, Paris, 1958.
[4] Classification des groupes de Lie algébriques, Séminaire Ecole Normale Supérieure, Paris, 1956-1968.
[5] Certain schémas de groupes semi-simples, Séminaire Bourbaki, exp. 219, Paris, 1960-1961.
Conrad, B.
[1] A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups, Journal of the Ramanujan Math. Soc. 17:1 (2002),1-18
Curtis, C.W.
[1] Central extensions of groups of Lie type, Journal f. reine u. angewandte Mathematik 220 (1965), 174-185.
Deligne, P.
[1] Catégories Tannakiennes, in: P. Cartier et al., The Grothendieck Festschrift, Band II, Birkäuser 1990, 111-195.
Deligne, P., Lusztig, G.
[1] Representations of reductive groups over finite fields, Annals of Mathematics 103 (1976), 103-161
Deligne, P., Milne, J.S.
[1] Tannakian Categories, in: Deligne et al., Hodge cycles, motives and Shimura varieties, Lecture Notes in Math. 900 (1982), Springer-Verlag.
Demazure, M.
[1] Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, Annales Ecole Normale Supérieure 7 (1974), 53-88.
Demazure, M., Gabriel, P.
[1] Groupes algébriques I, Masson/North-Holland 1970.
Demazur, M., Grothendieck, A.
[1] Seminaire de Geometrie Algebrique, SGA 3, Schemas en Groupes I-III, Lecture Notes in Math. 151,152,153 (1970), Springer-Verlag
Dieudonné, J.
[1] La géometrie des groupes classiques, Ergebnisse der Mathematik 5 (2. Aufl.), Springer-Verlag 1962.
Freudenthal, H.
[1] Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenenene I, II, Indagationes Mathematicae 16 (1954),218-230.
Frenkel, I.B., Kac, V.
[1] Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models, Inventiones Mathematicae 62 (1980),23-66.
Gelfand, I.M.
[1] Automorphic functions and the theory of representations, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Stockholm 1962), 74-85.
Gelfand, I.M., Neumark, M.A.
[1] Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen, Akademie-Verlag, Berlin 1957.
Godement, R.
[1] Théorie des faisceaux, Hermann 1958.
Gorenstein, D.
[1] Finite groups, Harper & Row 1968.
Griffiths, P., Harris, J.
[1] Principles of algebraich geometry, John Wiley & Sons, New York 1978
Grothendieck, A., Dieudonné, J.

[1] Eléments de géometrie algébrique, Publications mathématiques IHES, 1960-1967.
Harder, G.
[1] Über einen Satz von E.Cartan, Abhandlungen Math. Seminar Univ. Hamburg 28 (1965),208-214.
[2] Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen I, Math. Zeitschrift 90 (1965);II, Ibid. 92 (1966),396-415.
[3] Chevalley groups over function fields and automorphic forms, Annals of Mathematics 100 (1974),249-306.
Hartshorne, R.
[1] Algebraic geometry, Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag 1977.
Humphreys, J.E.
[1] Linear algebraic groups, (2.Aufl.), Graduate Texts in Math. 21, Springer-Verlag 1981.
[2] Reflection groups and Coxeter groups, Cambride University Press 1990.
Jacobson, N.
[1] Lie algebras, Interscience 1962.
[2] Structure and Representations of Jordan Algebras, American Math. Society Colloquium Publications, Vol. XXXIX, American Mathematical Society 1968.
[3] Lectures on quadratic Jordan algebras, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1969.
[4] Basic algebra I, Freeman 1974.
[5] Basic algeba II, Freeman 1980.
Jantzen, J.C.
[1] Representation of algebraic groups, Academic Press 1987.
[2] Lectures on quantum groups, Graduate Studies in Math. 6 (1996), American Mathematical Society.
Kambayashi, T., Miayamishi, M., Takeushi, M.
[1] Unipotent algebraic groups, Lecture Notes in Math. 414 (1974), Springer-Verlag.
Kassel, C.
[1] Quantum groups, Graduate Texts in Math. 155 (1995), Springer-Verlag.
Knus, M.-A., Merkurjev, A., Rost, M., Tignol, J.-P.
[1] The Book of involutions, to appear.
Kolchin, E.R.
[1] Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations, Annals of Mathematics 49 (1948),1-42.
[2] On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups, Annals of Mathematics 49 (1948),774-789.
Lam, T.Y.
[1] Introduction to quadratic forms over fields, Graduate Studies in Mathematics 67, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005
Lang, S.
[1] Algebraic groups over finite fields, Amer. J. Math. 78 (1956),555-563.
[2] Algebra, Addison-Wesley, 1977.
Lazard, M.
[1] Sur les groupes de Lie formels à un paramètre, Bull. Soc. Math. France 83 (1955),251-274.
Matsumura, H.
[1] Commutative algebra, W.A. Benjamin, Inc. New York 1970
[2] Commutative ring theory, Cambridge University Press, New York 1986.
Milne, J.S.
[1] Algebraic groups, The theory of algebraic group schemes of finite type over a field, Cambridge University Press, Cambridge 2017
Mumford, D.
[1] Abelian varieties, Oxford University Press, 1970.
[2] The Red Book of varieties and schemes, Lecture Notes in Math. 1358 (1988), Springer-Verlag
Oda, T.

[1] Convex bodies and algebraic geometry - An introduction to the theory of toric varieties, Ergebnisse der Math. (3), Bd. 15, Springer-Verlag 1988.
Oesterlé, J.
[1] Nombres de Tamagawa et groupes de unipotents en caractéristique p, Inventiones Mathematicae 78 (1984), 13-88.
Petersson, H.P., Racine, M.
[1] Albert algebras, in: Proceedings Conference on Jordan algebras (ed. W. Kaup, K. McCrimmon, H.P. Petersson), p. 197-207, W. de Guyter, 1994.
Platonov, V.P., Rapinchuk, A.S.
[1] Algebraic groups and number theory (in Russisch), Moscow, 1991 (Englische Übersetzung: Academic Press, 1993)
Richardson, R.W.
[1] Conjugacy classes in Lie algebras and algebraic groups, Annals of Mathematics 86 (1967),1-15.
Ronan, M.
[1] Lectures on buildings, Academic Press, 1989.
Rosenlicht, M.
[1] Some rationality questions on algebraic groups, Annali die Mat. Pura Appl. 43 (1957), 25-50.
[2] Questions of rationality for solvable algebraic groups over nonperfect fields, Annali die Mat. Pura Appl. 61 (1963),97-120.
Russel, P.
[1] Forms of the affine line and its additive group, Pacific J. Maath. 32 (1970),527-539.
Satake, I.
[1] Classification theory of semi-simple algebraic groups (mimeographed notes), University of Chicago, 1967.
Scharlau, W.
[1] Quadratic and Hermitian forms, Grundlehren der math. Wissenschaften 270, Springer-Verlag 1985.
Selbach, M.: Klassifikationstheorie halbeinfacher algebraischer Gruppen, Bonner mathematische Schriften 83 (1976)
Serre, J.-P.
[1] Quelques propriétés des variétés abéliennes en caracteristique p, American Journal of Mathematics 80 (1958),715-739.
[2] Cohomologie galoissienne, 5me éd., Lecture Notes in Math. 5 (1994), Springer-Verlag (English translation: Springer-Verlag 1997).
[3] Cohomologie galoissienne, progrès et problèmes, Séminaire Bourbaki 783 (1993-94)
Shafarevich, I.R.
[1] Basic algebraic gemetry, Grundlehren 213, Springer-Verlag, Heidelberg 1974.
Slodowy, P.
[1] Simple singularites and simple algebraic groujps, Lecture Notes in Math. 815 (1980), Springer-Verlag.
Springer, T.A.
[1] Jordan algebras and algebraic groups, Ergebnisse der Math. 75, Springer-Verlag 1970.
[2] Linear algebraic groups, in: Algebraic geometry IV (ed. A.N.Parchin and I.R.Shafarevich), Encyclopedia of Mathematical Sciences, vol. 55 (1994),1-121, Springer-Verlag.
Springer, T.A., Veldkamp, F.D.
[1] Octonians, Jordan algebras and exceptional groups, to appear.
Steinberg, R.
[1] Gémérateurs, relations et revêtements de groupes algébriques, in: Collogue sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles, 1963, p. 113-127.
[2] Regular elements of semisimple algebraic groups, Pub.Math. IHES 25 (1965),282-312.

[3] Endomorphisms of linear algebraic groups, Memoirs American Mathematical Society 80 (1968)
[4] Lectures on Chevalley groups, Yale University 1968.
[5] Conjugacy classes in algebraic groups, Lecture Notes in Math. 366 (1974), Springer-Verlag.

Takeuchi, M.
[1] A hyperalgebraic proof of the isomorphism and isogeny theorems for reductive groups, Journal of algebra 85 (1983),179-196

Tannaka, T.
[1] Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen, Tôhoku Mathematical Journal 45 (1938),1-12

Tits, J.
[1] Normalisateurs de tores I, Groupes de Coxeter étendu, Journal of Algebra 4 (1966), 96-116.
[2] Classification of algebraic semisimple groups, in: Algebraic groups and discontinuous groups,Proceedings Symp. Pure Math. IX (1966), 33-62, American Mathematical Society
[3] Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles I, Construction, Indagationes Mathematicae 28 (1966),223-237.
[4] Lectures on algebraic groups, Yale University 1968.
[5] Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, Inventiones Mathematicae 5 (1968),19-41.
[6] Résumé des cours, 1990-1991,1991-1992, 1992-1993, Collège de France, Paris.
[7] Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups, Journal of algebra 131 (1990),648-677.

Waerden, B.L. van der
[1] Algebra I + II, Neunte Auflage, Springer-Verlag 1993

Weil, A.
[1] On algebraic groups and homogenous spaces, Americal Journal of Mathematics 70 (1955),493-512.
[2] Algebras with involutions and the classical groups, Journal Indian Mathematical Society 24 (1960),589-623.
[3] Foundations of algebraic geometry, revised ed., American Mathematical Society, 1962,
[4] Adeles and algebraic groups, 2nd ed., Birkhäuser 1982.

Anhänge

1 Das Tensorprodukt

Bei der Einführung des Tensorprodukts ist man in einer ähnlichen Situation wie bei der Einführung der Determinante: man kann zwar eine geschlossene Formel dafür angeben, aber diese ist so aufwendig in der Handhabung, daß man sie in praktischen Situationen nie benutzt, man verwendet sie nur für theoretische Betrachtungen.

Beim Tensorprodukt ist die explizite Beschreibung nicht einmal für theoretische Zwecke sinnvoll. Sie ist nur von Nutzen beim Beweis für die Existenz des Tensorprodukts.

Wir beschränken uns hier auf die Handlung des Tensorprodukts über kommutativen Ringen mit 1. Sei A ein kommutativer Ring mi1 1. Wir bezeichnen mit

$$A\text{-Mod}$$

die Kategorie der (linken) A-Moduln und A-linearen Abbildungen. Für je zwei A-Moduln U, V bezeichnen wir die Hom-Menge der Morphismen $U \longrightarrow V$ in A-Mod mit

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(U, V) = \mathrm{Hom}_A(U, V).$$

1.0 Vorbemerkungen

Sei A ein kommutativer Ring mit 1.

(i) Unser Ziel ist die Betrachtung von bilinearen Abbildungen

$$b: U\times V \to W$$

mit beliebigen A-Moduln U, V und W, d.h. von Abbildungen f mit

$$f(c'u'+c''u'', v) = c'\cdot f(u',v) + c''\cdot f(u'',v)$$
$$f(u, c'v' + c''v'') = c'\cdot f(u,v') + c''\cdot f(u,v'')$$

für beliebige $u,u',u''\in U$, $v,v',v''\in V$ und $c',c''\in K$.

(ii) Genauer, wir wollen die allgemeinste Art von Abbildung dieser Gestalt finden, die es für diese Räumen geben kann.

(iii) Dabei ist die konkrete Konstruktion dieser Abbildung nicht besonders schön, relativ kompliziert und genaugenommen nicht so wichtig. Wichtiger ist ihre Eigenschaft, die ‘allgemeinste’ Abbildung zu sein und die Tatsache, daß es eine solche Bilinearform gibt.

(iv) Wir werden deshalb wie folgt vorgehen.

1 beschreiben zunächst, was wir unter der ‘allgemeinsten’ bilinearen Abbildung verstehen wollen, indem wir deren sogenannte <u>Universalitätseigenschaft</u> angeben.
2. Wir zeigen, durch diese Eigenschaft ist die Konstruktion bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
3. Wir beweisen unter der Annahme, daß das Konstrukt stets existiert, dessen wichtigste Eigenschaften.
4. Erst ganz zum Schluß werden wir zeigen, daß das Konstrukt tatsächlich existiert.

Zunächst wollen wir zur Illustration unserer Vorgehensweise eine ähnlich gelagerte Problemstellung betrachten, deren Lösung wir im wesentlichen bereits kennen.

1.1 Beispiel für eine Universalitätseigenschaft

Für jede A-lineare Abbildung $f:U \to V$ wollen wir eine A-lineare Abbildung

$$\rho:V \to \mathrm{Coker}(f)$$

konstruieren, welche natürliche Abbildung auf den <u>Kokern</u> von f heißt. Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt sein.

1. $\rho\circ f = 0$.
2. Für jede A-lineare Abbildung $g:V\to W$ mit $\rho\circ g = 0$ soll es genau eine A-lineare Abbildung $\tilde{g}$: $\mathrm{Coker}(f) \to W$ geben mit $g = \tilde{g}\circ f$, mit anderen Worten, eine solche lineare Abbildung, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[dl, "\tilde{g}"] \\ W & \end{tikzcd}$$

Bemerkungen zum Begriff der Universalitätseigenschaft

(i) Nach Bedingung 1 ist ρ eine Abbildung mit $\rho\circ f = 0$. Offensichtlich hat jede Zusammensetzung

$$V \xrightarrow{\rho} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{h} W$$

mit einer beliebigen (linearen) Abbildung h ebenfalls diese Eigenschaft,.

(ii) Bedingung 2 besagt gerade, daß man durch Zusammensetzen mit solchen Abbildungen h sämtliche Abbildungen bekommt deren Zusammensetzung mit f Null ist. Und zwar auf genau eine Weise (d.h. verschiedene h liefern verschiedene Zusammensetzungen).

(iii) Genauer: für jeden A-Modul W sei

$$C(W) := \{ g: V \longrightarrow W \mid g \text{ ist K-linear und } g\circ f = 0 \}.$$

Die Universalitätseigenschaft con Coker(f) besagt dann gerade, daß die folgende Abbildung bijektiv ist.

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}(f), W) \longrightarrow C(W),\ \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\rho.$$

(iv) Anders ausgedrückt bedeutet Bedingung 2 bedeutet gerade, daß die Abbildung ρ in dem Sinne 'universell' ist, daß man aus ihr jede andere Abbildung mit der Eigenschaft 1 gewinnen kann, und zwar auf genau eine Weise. Man sagt in einer solche Situation, ρ ist <u>universell</u> bezüglich Eigenschaft 1 oder auch, 2 ist eine <u>Universalitätseigenschaft</u>.

(v) Die obige Beschreibung des Raumes

$$\mathrm{Coker}(f)$$

entspricht gerade dem ersten Schritt, wie wir ihn für das Tensorprodukt angekündigt haben. Wir zeigen hier zunächst, daß Coker(f) durch die obigen beiden Eigenschaften bereits bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Anschließend beweisen wir die Existenz von (ρ und) Coker(f).

<u>Die Eindeutigkeit von Coker(f) bis auf Isomorphie</u> ei eine weitere A-lineare Abbilduug

$$\rho': V \to C'$$

gegeben, für welche die Bedingungen 1 und 2 mit C' anstelle von C := Coker(f) erfüllt sind.

Dann gilt $\rho'\circ f = 0$. Auf Grund der Eigenschaft 2 von ρ faktorisiert sich ρ' eindeutig über ρ,

$$\rho': V \xrightarrow{\rho} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\tilde{\rho}'} C',$$

d.h. es gibt genau eine A-lineare Abbildung $\tilde{\rho}'$ mit $\rho' = \tilde{\rho}'\circ\rho$.

Da auch ρ' die Universalitätseigenschaft 2 besitzt und $\rho\circ f = 0$ gilt, faktorisiert sich auch ρ eindeutig über ρ',

$$\rho: V \xrightarrow{\rho'} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\tilde{\rho}} C',$$

d.h. es gibt genau eine A-lineare Abbildung $\tilde{\rho}$ mit $\rho = \tilde{\rho}\circ\rho$.

Damit erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho'"'] & C \arrow[dl, "\tilde{\rho}'"] \\ C' & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho'"'] & C \\ C' \arrow[ur, "\tilde{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

und durch Zusammensetzen dieser Dreiecke weiterhin kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \\ C \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "\rho'"'] & C' \\ C' \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

mit $u := \tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}'$ und $u' := \tilde{\rho}'\circ\tilde{\rho}$. Auf Grund von Eigenschaft 2 ist die Abbildung u durch die Kommutativität des ersten Diagramms aber eindeutig bestimmt. Da das Diagramm kommutativ bleibt, wenn man u durch die identische Abbildung ersetzt, folgt

$$\tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}' = u = \mathrm{Id}.$$

Dieselbe Argumentation mit dem zweiten Diagramm liefert

$$\tilde{\rho}'\circ\tilde{\rho} = u = \mathrm{Id}.$$

Mit anderen Worten, $\tilde{\rho}$ und $\tilde{\rho}'$ sind zueinander inverse Isomorphismen und die Räume C und C' sind isomorph (sogar in eindeutig bestimmter Weise!).

<u>Existenz von Coker(f)</u>. Wir setzen

$$\mathrm{Coker}(f) := V/\mathrm{Im}(f)$$

und verwenden für ρ die natürliche Abbildung

$$\rho: V \to V/\mathrm{Im}(f),\ v \mapsto v + \mathrm{Im}(f),$$

auf den Faktorraum,

$$\rho(v) := v + \mathrm{Im}(f).$$

Dann ist Bedingung 1 offensichtlich erfüllt. Beweisen wir, daß auch 2 gilt. Sei also eine A-lineare Abbildung

$$g: V \to W$$

gegeben mit $g\circ f = 0$. Wir haben zu zeigen, es gibt genau eine A-lineare Abbildung

$$\tilde{g}: V/\mathrm{Im}(f) \to W$$

mit $\tilde{g}\circ f = g$. Falls $\tilde{g}$ existiert, so muß gelten,

$$\tilde{g}(v+\mathrm{Im}(f)) = \tilde{g}(f(v)) = g(v),$$

mit andern Worten, der Wert von $\tilde{g}$ an der Stelle v+Im(f) ist eindeutig bestimmt.

Wir haben noch die Existenz von $\tilde{g}$ zu beweisen. Wir setzen

(*) $$\tilde{g}(v+\mathrm{Im}(f)) := g(v).$$

Falls wir zeigen können, daß diese Definition korrekt ist, so sind wir fertig, denn dann gilt

$$\tilde{g}(f(v)) = g(v) \text{ für alle } v\in V$$

(und offensichtlich ist $\tilde{g}$ eine lineare Abbildung).

Beweisen wir die Korrektheit der Definition (*). Seien $v,v'\in V$ zwei Vektoren mit

$$v + \mathrm{Im}(f) = v' + \mathrm{Im}(f).$$

Wir haben zu zeigen, daß dann $g(v) = g(v')$ gilt. Auf Grund der Voraussetzung gilt

$$v-v' \in \mathrm{Im}(f).$$

Wegen $g\circ f = 0$ gilt $g|_{\mathrm{Im}(f)} = 0$, d.h.

$$0 = g(v-v') = g(v) - g(v'),$$

also $g(v) = g(v')$.

QED.

Bemerkung

Wir haben damit die natürliche Abbildung $\rho: V \longrightarrow V/\mathrm{Im}(f)$, $v \mapsto v + \mathrm{Im}(f)$, für jede lineare Abbilung $f: U \longrightarrow V$ durch eine Universalitätseigenschaft charakterisiert. Ist $U \subseteq V$ ein linearer Unterraum und $f: U \hookrightarrow V$ die natürliche Einbettung, so erhalten wir gerade die folgende Charakterisierung der natürlichen Abbildung

$$\rho : V \longrightarrow V/U,\ v \mapsto v + U.$$

Es gilt der Homomorphie-Satz:

1. $U \subseteq \mathrm{Ker}(\rho)$.
2. Eine lineare Abbildung $g: V \longrightarrow W$ faktorisiert sich genau dann über ρ, wenn $U \subseteq \mathrm{Ker}(g)$ gilt.
3. Die Faktorisierung von g über ρ ist, falls sie existiert eindeutig.

1.2 Definition des Tensorprodukts zweier A-Moduln

Seien V und W zwei A-Vektorräume. Das Tensorprodukt von V und W ist ein A-Vektoraum

$$V\otimes W = V\otimes_A W$$

zusammen mit einer A-bilinearen Abbildung

$$\rho=\rho_{V,W}: V\times W \to V\otimes W,\ (v,w) \mapsto \rho(v,w) =: v\otimes w$$

wobei folgende Bedingung erfüllt ist.

(⊗) A-bilineare Abbildung $b:V\times W\to U$ mit Werten in einem A-Vektorraum U faktorisiert sich eindeutig über ρ,

$$b: V \times W \xrightarrow{\rho} V\otimes W \xrightarrow{\tilde{b}} U,$$

d.h. es gibt genau eine A-lineare Abbildung $\tilde{b}$ mit $b = \tilde{b}\circ\rho$.

Mit anderen Worten, es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\rho"'] & U \\ V\otimes W \arrow[ur, "\tilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

mit einer linearen Abbildung $\tilde{b}$, und diese lineare Abbilding $\tilde{b}$ ist durch die Kommutativität dieses Diagramms eindeutig bestimmt.

Die Elemente von $V\otimes W$ heißen Tensoren.

Bemerkungen

(i) Setzt man die bilineare Abbildung $\rho:V\times W\to V\otimes W$ mit einer linearen Abbildung $V\otimes W\to U$ zusammen, so erhält man trivialerweise eine bilineare Abbildunge

V×W→U. Bedingung (⊗) besagt gerade, daß man auf diese Weise jede auf V×W definierte bilineare Abbildung erhält erhält, und zwar jede auf genau eine Weise.

(ii) Bedingung (⊗) ist äquivalent zu der Aussage, daß die folgende lineare Abbildung bijektiv ist.

$$\mathrm{Hom}_A(V\otimes W,U) \to L(V,W,U),\ \tilde{b} \mapsto \rho\circ \tilde{b}.$$

Dabei bezeichne

$$L(V,W;U)$$

den A-Modul der über A bilinearen Abbildungen V×W→U.

(iii) Wir zeigen als nächstes, daß das Tensorprodukt, falls es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Danach werden wir die wichtigsten Eigenschaften des Tensorprodukt unter der Annahme, daß es existiert, ableiten. Seine Existenz beweisen wir ganz zum Schluß.

1.3 Eindeutigkeit des Tensorprodukts bis auf Isomorphie

Seien V,W zwei A-Vektorräume und

$$b: V\times W \to U \text{ und } b': V\times W \to U'$$

zwei bilineare Abbildungen, welche die Eigenschaft (⊗) eines Tensorprodukts besitzen.

Dann gibt es genau einen A-linearen Isomorphismus f:U→U' , für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b'"'] & U \arrow[dl, "f", "\cong"'] \\ U' & \end{tikzcd}$$

d.h. es gilt b' = f∘b.

Beweis. Auf Grund der Universalitätseigenschaft (⊗) von b gibt es zumindest eine A-lineare Abbildung f:U→U' mit der geforderten Eigenschaft,

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b'"'] & U \arrow[dl, "f"] \\ U' & \end{tikzcd}$$

Weiterhin gibt es aber auch (auf Grund der Universaltätseigenschaft (⊗) von b') eine A-lineare Abbildung f' sodaß

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b'"'] & U \\ U' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Durch Zusammensetzen dieser kommutativen Dreiecke erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "b'"'] & U' \\ U' \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b"'] & U \\ U \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

mit u := f∘f' und u' := f'∘f. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage von (⊗) sind die linearen Abbildungen u und u' durch die Kommutativität dieser Diagramme eindeutig festgelegt. Da die Diagramme aber kommutativ bleiben, wenn man u und u' durch die identischen Abbildungen ersetzt, gilt

$$f\circ f' = u = \mathrm{Id} \text{ und } f'\circ f = u' = \mathrm{Id}.$$

Die Abbildungen f und f' sind folglich zueinander inverse Isomorphismen.
QED.

Bemerkungen

(i) Aus der obigen Argumentation ergibt sich, daß jede A-lineare Abbildung f, für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b'"'] & U \arrow[dl, "f"] \\ U' & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, automatisch ein Isomorphismus ist.

(ii) Im folgenden nehmen wir an, daß das Tensorprodukt zweier A-Vektorräume V und W stets existiert. Das Bild des Paares $(v,w)\in V\times W$ bei der natürlichen Abbildung

$$\rho = \rho_{V,W}: V\times W \to V\otimes W$$

bezeichnen wir wie in der Definition mit $v\otimes w$, d.h. die natürliche Abbildung soll gerade die Abbildungsvorschrift

$$V\times W \to V\otimes W,\ (v,w) \mapsto v\otimes w.$$

haben. Die Bilinearität der natürlichen Abbildung ρ bedeutet gerade, daß die folgenden Rechenregeln gelten.

(a) $(v'+v'')\otimes w = v'\otimes w + v''\otimes w$

(b) $v\otimes(w'+w'') = v\otimes w' + v\otimes w''$

(c) $(cv)\otimes w = c(v\otimes w) = v\otimes(cw)$

für beliebige $v,v',v''\in V$, $w,w',w''\in W$, $c\in A$.

Wir beweisen als nächstes die wichtigsten Eigenschaften des Tensorprodukts.

1.4 Ein Erzeugendensystem für V⊗W

Seien $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ Erzeugendensysteme der A-Vektorräume V bzw. W. Dann bilden die Vektoren der Gestalt

$$v_i\otimes w_j$$

mit $i\in I$ und $j\in J$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums $V\otimes W$.

Beweis. Sei

$$U := < v_i\otimes w_j \mid i \in I, j \in J > \subseteq V\otimes W$$

der von den Vektoren $v_i\otimes w_j$ erzeugte A-Teilmodul von $V\otimes W$. Jeder Vektor $v\in V$ ist Linearkombination der v_i und jeder Vektor $w\in W$ ist Linearkombination der w_j . Also ist $v\otimes w$ Linearkombination der $v_i\otimes w_j$. Mit anderen Worten, für jedes $v\in V$ und jedes $w\in W$ gilt

$$v\otimes w \in U.$$

Die Abbildungsvorschrift der natürlichen Abbildung

$$\rho: V \times W \to V\otimes W,\ (v,w) \mapsto v\otimes w$$

definiert also auch eine bilineare Abbildung

$$b: V\times W \to U,\ (v,w) \mapsto v\otimes w.$$

Insbesondere hat man ein kommutatives Diagramm

(1)
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\rho"'] & U \arrow[dl, "i"] \\ V\otimes W & \end{tikzcd}$$

wenn

$$i: U \to V\otimes W$$

die natürliche Einbettung bezeichnet. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, die natürliche Einbettung i ist surjektiv, denn dann gilt

$$V\otimes W = U = \langle u_i \otimes v_j \mid i\in I,\ j\in J\rangle.$$

Weil b bilinear ist, ergibt sich aus der Universalitätseigenschaft von ρ die Existenz einer linearen Abbildung $\tilde{b}$, für welches das Diagramm

(2)
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\rho"'] & U \\ V\otimes W \arrow[ur, "\tilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, d.h. mit

$$\tilde{b}(v\otimes w) = v\otimes w.$$

Durch Zusammensetzen der Diagramme (1) und (2) erhalten wir ein kommutatives Diagramm

(2)
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & V\otimes W \\ V\otimes W \arrow[ur, "i\circ\tilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage der Universalitätseigenschaft von ρ muß dann aber

$$i\circ\tilde{b} = \mathrm{Id}$$

gelten. Für jedes $t \otimes V\otimes W$ gilt also

$$t = \mathrm{Id}(t) = i(\tilde{b}(t)) \in \mathrm{Im}(i),$$

d.h. es ist

$$\mathrm{Im}(i) = V\otimes W.$$

Die natürliche Einbettung $i : U \to V\otimes W$ ist somit surjektiv.
QED.

1.5 Eigenschaften des Tensorprodukts von Moduln

Seien U, V, W beliebige A-Moduln. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt genau eine K-lineare Abbildung $V\otimes A\to V$ mit

$$v\otimes c \mapsto cv.$$

Diese ist ein Isomorphismus

$$V\otimes A \cong V.$$

(ii) Es gibt genau eine A-lineare Abbildung $V\otimes W \to W\otimes V$ mit

$$v\otimes w \mapsto w\otimes v.$$

Diese ist ein Isomorphismus,

$$V\otimes W \cong W\otimes V$$

(iii) Es gibt genau eine A-lineare Abbildung $U\otimes(V\otimes W) \to (U\otimes V)\otimes W$ mit

$$u\otimes(v\otimes w) \mapsto (u\otimes v)\otimes w.$$

Diese ist ein Isomorphismus

$$U\otimes(V\otimes W) \cong (U\otimes V)\otimes W.$$

(iv) Es gibt genau eine bilineare Abbildung $U\otimes(V\oplus W) \to (U\otimes V)\oplus(U\otimes W)$ mit

$$u\otimes(v,w) \mapsto (u\otimes v, u\otimes w).$$

Diese ist ein Isomorphismus

$$U\otimes(V\oplus W) \cong (U\otimes V)\oplus(U\otimes W)..$$

Beweis. Zu (i). Wir betrachten die bilineare Abbildung

$$m: V\times A \to V, (v,c) \mapsto cv.$$

Zeigen wir, diese Abbildung besitzt die Eigenschaft ($\otimes$) des Tensorprodukts.

Sei also $b: V\times A \to P$ eine bilineare Abbildung. Wir haben zu zeigen, diese Abbildung faktorisiert sich eindeutig über m,

$$b: V \times A \xrightarrow{m} V \xrightarrow{\tilde{b}} P,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{b}$ mit $b = \tilde{b}\circ m$.

Eindeutigkeit von $\tilde{b}$. Für jedes $v\in V$ gilt, falls $\tilde{b}$ existiert,

$$\tilde{b}(v) = \tilde{b}(1\cdot v) = \tilde{b}(m(v,1)) = b(v,1).$$

Mit anderen Worten $\tilde{b}$ ist durch b eindeutig festgelegt.

Existenz von $\tilde{b}$.
Wir setzen

$$\tilde{b}(v) := b(v,1) \text{ für jedes } v \in V.$$

Weil b bilinear ist, ist auf diese Weise eine lineare Abbildung

$$\tilde{b}: V \longrightarrow P$$

definiert. Für beliebige $(v, c) \in V \times A$ gilt

$$\tilde{b}(m(v, c)) = \tilde{b}(cv) = b(cv, 1) = c\cdot b(v,1) = b(v, c\cdot 1) = b(v,c).$$

Wir haben gezeigt, $b = \tilde{b}\circ m$, d.h. $\tilde{b}$ ist die Abbildung mit der geforderten Eigenschaft.

Wir haben gezeigt, die oben definierte Abbildung m besitzt die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts. Auf Grund von Bemerkung 1.3 (i) gibt es genau einen Isomorphismus

$$\tilde{m}: V\otimes K \longrightarrow V,$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V\times K & \xrightarrow{m} & V \\ \rho\downarrow & \nearrow\tilde{m} & \\ V\otimes K & & \end{array}$$

kommutativ ist. Auf Grund der Kommutativität dieses Diagramms gilt aber

$$\tilde{m}(v\otimes c) = \tilde{m}(\rho(v,c)) = m(v,c) = cv,$$

d.h. $\tilde{m}$ ist der Isomorphismus, dessen Existenz in Aussage (i) behauptet wird.

Zu (ii). Betrachten wir die Abbildung

$$b{:}V\times W \to W\otimes V,\ (v,w) \mapsto w\otimes v.$$

Nach Bemerkung 1.3 (ii) ist diese Abbildung bilinear. Deshalb faktorisiert sich diese Abbildiung eindeutig über das Tensorprodukt $V\otimes W$,

$$b\colon V \times W \xrightarrow{\rho} V\otimes W \xrightarrow{f} W\otimes V,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung f mit $b = f\circ\rho$, d.h.

$$f(v\otimes w) = f(\rho(v,w)) = b(v,w) = w\otimes v.$$

Wir haben noch zu zeigen, die lineare Abbildung

$$f\colon V\otimes W \to W\otimes V,\ v\otimes w \mapsto w\otimes v.$$

ist ein Isomorphismus. Aus Symmetriegründen gibt es aber auch genau eine A-lineare Abbildung

$$f'\colon W\otimes V\to V\otimes W,\ w\otimes v \mapsto v\otimes w$$

Es gilt

$$(f\circ f')(w\otimes v) = w\otimes v$$

und

$$(f'\circ f)(v\otimes w) = v\otimes w,$$

für beliebige $v \in V$ und $w \in W$.

Die Abbildungen $f\circ f'$ und $f'\circ f$ wirken auf einem Erzeugendensystem von $W\otimes V$ bzw. $V\otimes W$ wie die identische Abbildung, sind also selbst identische Abbildungen. Also sind f und f' zueinaner inverse Isomorphismen.

Zu (iii). Betrachten wir für vorgegebens $w \in W$ die Abbildung

$$U\times V \to U\otimes(V\otimes W),\ (u,v) \mapsto u\otimes(v\otimes w).$$

Diese Abbildung ist bilinear, faktorisiert sich also über das Tensorprodukt $U\otimes V$,

$$U \times V \xrightarrow{\rho} U\otimes V \xrightarrow{f_w} U\otimes(V\otimes W),$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung f_w, deren Zusammensetzung mit ρ gerade die vorgegebene Abbildung ist, d.h. eine lineare Abbildung f_w mit

$$f_w(u\otimes v) = f_w(\rho(u,v)) = u\otimes(v\otimes w).$$

Untersuchen wir, in welcher Weise die lineare Abbildung

$$f_w\colon U\otimes V \to U\otimes(V\otimes W),\ u\otimes v \mapsto u\otimes(v\otimes w),$$

von $w \in W$ abhängt, d.h. betrachten wir die Abbildung

$$f:(U\otimes V)\times W \to U\otimes(V\otimes W),\ (t, w) \mapsto f_w(t).$$

Diese Abbildung ist linear in t. Zeigen wir, daß sie auch linear in w ist, d.h. daß gilt

$$f_{c'w'+c''w''}(t) = c'f_{w'}(t) + c''f_{w''}(t).$$

Zumindest stehen auf beiden Seiten der zu beweisenden Identität A-lineare Abbildungen

$$\varphi:U\otimes V \to U\otimes(V\otimes W),\ t \mapsto \varphi(t).$$

und die Abbildung auf der linken Seite ist durch die folgende Bedingung eindeutig festgelegt:

$$\varphi(u\otimes v) = u\otimes(v\otimes(c'w'+c''w'')).$$

Zum Beweis der Gleichheit reicht es folglich, wenn wir zeigen, die Abbildung auf der rechten Seite genügt derselben Bedingung. Sei also φ die Abbildung auf der rechten Seite. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(u\otimes v) &= c'f_{w'}(u\otimes v) + c''f_{w''}(u\otimes v)\\
&= c'\cdot u\otimes(v\otimes w') + c''u\otimes(v\otimes w'')\\
&= u\otimes(c'\cdot(v\otimes w')) + u\otimes(c''\cdot(v\otimes w''))\\
&= u \otimes (v\otimes c'w') + u \otimes (v\otimes c''w'')\\
&= u \otimes (v\otimes c'w' + v\otimes c''w'')\\
&= u \otimes (v\otimes(c'w'+c''w''))
\end{aligned}$$

Damit ist die Bilinearität der Abbildung f gezeigt. Die Abbildung f faktorisiert sich damit über das Tensorprodukt $(U\otimes V)\otimes W$,

$$f: (U\otimes V)\times W \xrightarrow{\rho} (U\otimes V)\otimes W \xrightarrow{g} U\otimes(V\otimes W),$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung g mit $f = g\circ\rho$, d.h. mit

$$g(t\otimes w) = g(\rho(t, w)) = f(t, w) = f_w(t).$$

Da die Abbildung f_w bereits durch ihre Werte in den Elementen der Gestalt $t = u\otimes v$ eindeutig festgelegt ist, gilt dasselbe für g, wobei

$$g((u\otimes v)\otimes w) = f_w(u\otimes v) = u\otimes(v\otimes w)$$

ist[1]. Wir haben damit gezeigt, es gibt genau eine A-lineare Abbildung

$$g: (U\otimes V)\otimes W \to U\otimes(V\otimes W)$$

mit $g((u\otimes v)\otimes w) = u\otimes(v\otimes w)$. Wir haben noch zu zeigen, diese Abbildung ist ein Isomorphismus.

Eine analoge Argumentation wie die eben angeführte zeigt, es gibt genau eine A-lineare Abbildung

$$h: U\otimes(V\otimes W) \to (U\otimes V)\otimes W$$

mit

$$h(u\otimes(v\otimes w)) = (u\otimes v)\otimes w$$

für alle $u\in U$, $v\in V$, $w\in W$. Die beiden Formeln für g und h zeigen, die beiden Zusammensetzungen sind lineare Abbildungen

$$g\circ h: U\otimes(V\otimes W) \to U\otimes(V\otimes W)$$

$$h\circ g: (U\otimes V)\otimes W \to (U\otimes V)\otimes W$$

mit

---

[1] Alternative Argumentationen: jedes $t \in U\otimes V$ ist A-Linearkombinnation von Elementen der Gestalt $u\otimes v$ und jedes Element von $(U\otimes V)\otimes W$ ist A-Linearkombination von Elementen der Gestalt $(u\otimes v)\otimes w$.

$$g\circ h(u\otimes(v\otimes w)) = u\otimes(v\otimes w)$$

und

$$h\circ g((u\otimes v)\otimes w) = (u\otimes v)\otimes w$$

für alle $u\in U$, $v\in V$, $w\in W$. Nach 1.4 bilden aber die Vektoren der Gestalt

$$u\otimes(v\otimes w) \text{ bzw. } (u\otimes v)\otimes w$$

ein Erzeugendensystem des Vektorraums $U\otimes(V\otimes W)$ bzw. $(U\otimes V)\otimes W$. Die beiden Zusammensetzungen stimmen also auf einem Erzeugendensystem mit der identischen Abbildung überein, sind also gleich der identisdchen Abbildung. Wir haben gezeigt, g und h sind zueinander inverse Isomorphismen.

Zu (iv). Betrachten wir die Abbildung

$$f: U\times(V\oplus W) \to (U\otimes V)\oplus(U\otimes W),\ (u, (v,w)) \mapsto (u\otimes v, u\otimes w).$$

Auf Grund der Bilinearität von $\otimes$ ist f ebenfalls bilinear:

$$\begin{aligned}
f(c'u' + c''u'',(v,w)) &= ((c'u' + c''u'')\otimes v, (c'u' + c''u'')\otimes w)\\
&= (c'u'\otimes v + c''u''\otimes v, c'u'\otimes w + c''u''\otimes w)\\
&= (c'u'\otimes v, c'u'\otimes w) + (c''u''\otimes v, c''u''\otimes w)\\
&= c'f(u',(v,w)) + c''f(u'', (v,w))\\
f(u, c'(v',w') + c''(v'',w'')) &= f(u, (c'v'+c''v'',c'w'+c''w''))\\
&= (u\otimes(c'v'+c''v''), u\otimes(c'w'+c''w''))\\
&= (c'u\otimes v' + c''u\otimes v'', c'u\otimes w' + c''u\otimes w'')\\
&= c'(u\otimes v', u\otimes w') + c''(u\otimes v'', u\otimes w'')\\
&= c'f(u, (v',w')) + c''f(u, (v'',w''))
\end{aligned}$$

Damit ist die Bilinearität von f bewiesen. Die Abbildung faktorisiert sich also eindeutig über die natürliche Abbildung ins Tensorprodukt $U\otimes(V\oplus W)$,

$$f: U \times (V\oplus W) \xrightarrow{\rho} U\otimes(V\oplus W) \xrightarrow{\tilde f} (U\otimes V)\oplus(U\otimes W),$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde f$ mit $f = \tilde f\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde f(u\otimes(v,w)) = \tilde f(\rho(u, (v,w))) = f(u, (v,w)) = (u\otimes v, u\otimes w)$$

Wir haben noch zu zeigen, die lineare Abbildung

$$\tilde f: U\otimes(V\oplus W) \to (U\otimes V)\oplus(U\otimes W), \tag{3}$$
$$u\otimes(v,w) \mapsto (u\otimes v, u\otimes w),$$

ist ein Isomorphismus. Dazu reicht eis zu zeigen, es gibt eine lineare Abbildung

$$\tilde g: (U\otimes V)\oplus(U\otimes W) \to U\otimes(V\oplus W), \tag{4}$$
$$(u'\otimes v',u''\otimes w'') \mapsto u'\otimes(v',0) + u''\otimes(0,w'')$$

und die beiden Zusammensetzungen

$$\tilde g\circ\tilde f;\ U\otimes(V\oplus W) \longrightarrow U\otimes(V\oplus W) \tag{5}$$
$$u\otimes(v,w) \mapsto (u\otimes v,u\otimes w) \mapsto u\otimes(v,0)+u\otimes(0,w) = u\otimes(v,w)$$
$$\tilde f\circ\tilde g: (U\otimes V)\oplus(U\otimes W) \mapsto (U\otimes V)\oplus(U\otimes W) \tag{6}$$
$$(u'\otimes v',u''\otimes w'') \mapsto u'\otimes(v',0) + u''\otimes(0,w'') \mapsto (u'\otimes v,0)+(0,u''\otimes w'')=(u'\otimes v',u''\otimes w'')$$

sind gerade die Identischen Abbildungen.

Abbildung (5) ist dabei ganz offensichtlich die identische Abbildungen, denn bei (5) wird ein Erzeugendensystem von $U\otimes(V\oplus W)$ genauso abgebildet wie bei der identischen Abbildung. Um zu zeigen, auch (6) ist die identische Abbildung, reicht es zu zeigen, die Einschränkung von (6) auf jeden der beiden direkten Summanden ist die identische Abbildung. Diese beiden Einschränkungen bilden aber jeweils ein Erzeugendensystem so ab wie die identische Abbildung:

$$U\otimes V \to U\otimes V \text{ , } u\otimes v \mapsto u\otimes v \text{ bzw. } U\otimes W\to U\otimes W,\ u\otimes w \mapsto u\otimes w.$$

Wir haben somit nur noch zu zeigen, daß die lineare Abbildung (4) existiert. Dazu wiederum reicht es zu zeigen, daß die beiden Einschränkungen auf die beiden direkten Summanden existieren:

$$U\otimes V \to U\otimes(V\oplus W),\ u\otimes v \mapsto u\otimes(v, 0),$$

$$U\otimes W \to U\otimes(V\oplus W),\ u\otimes w \mapsto u\otimes(0,w).$$

Diese beiden letzten Abbildungen existieren aber wegen der Universalitätseingenschaft des Tensorprodukts und der Bilinearität der beiden folgenden Abbildungen.

$$U\times V \to U\otimes(V\oplus W),\ (u, v) \mapsto (u\otimes v, 0),$$

$$U\times W \to U\otimes(V\oplus W),\ (u, w) \mapsto (0, u\otimes w).$$

QED.

Bemerkung

Aussage (iv) läßt sich auf den Fall einer beliebigen Familie $\{V_i\}_{i\in I}$ von A-Moduln verallgemeinern: die A-lineare Abbildung

$$U\otimes(\oplus_{i\in I} V_i) \longrightarrow \oplus_{i\in I} (U\otimes V_i),\ u\otimes \sum_{i\in I} v_i \mapsto \sum_{i\in I} u\otimes v_i\ ,$$

ist wohldefiniert und bijektiv und besitzt die Umkehrung

$$\oplus_{i\in I} (U\otimes V_i) \longrightarrow U\otimes(\oplus_{i\in I} V_i),\ \sum_{i\in I} u_i\otimes v_i \mapsto \sum_{i\in I} u_i\otimes\{\delta_{ij}\bullet v_i\}_{j\in I}\} = \sum_{i\in I} u_i\otimes v_i.$$

Die Schreibweise ganz rechts identifiziert dabei jedes V_i mit dem Teilmodul der direkten Summe $\oplus_{i\in I} V_i$, dessen Elemente nur an der i-ten Stelle eine von Null verschiedene Koordinate besitzen.

Der **Beweis** ist im wesentlichen derselbe. Man zeigt, daß die Abbilduing

$$f: U \times (\oplus_{i\in I} V_i) \longrightarrow \oplus_{i\in I} (U\otimes V_i),\ (u, \sum_{i\in I} v_i) \mapsto \sum_{i\in I} u\otimes v_i\ ,$$

bilinear ist, und erhält so eine A-lineare Abbildung

$$f: U \otimes (\oplus_{i\in I} V_i) \longrightarrow \oplus_{i\in I} (U\otimes V_i),\ u\otimes \sum_{i\in I} v_i \mapsto \sum_{i\in I} u\otimes v_i\ .$$

Dann zeigt man für jedes $i\in I$, daß die Abbildung[2]

$$U\times V_i \to U\otimes(\oplus_{i\in I} V_i),\ (u, v) \mapsto u\otimes\{\delta_{ij}\bullet v\}_{j\in I},$$

bilinear ist, und erhält so für jedes $i\in I$ die A-lineare Abbildung

$$g_i:U\otimes V_i \to U\otimes(\oplus_{i\in I} V_i),\ u\otimes v \mapsto u\otimes\{\delta_{ij}\bullet v\}_{j\in I},$$

Die Abbildungen g_i setzen sich zu einer A-linearen Abbildung

---

[2] Für $i \neq j$ sei $\delta_{ij}\bullet v$ das Null-Element des Moduls V_j (obwohl v in V_i liegen soll).

$$g: \oplus_{i\in I} (U\otimes V_i) \longrightarrow U \otimes (\oplus_{i\in I} V_i),\ \sum_{i\in I} u\otimes v_i \mapsto \sum_{i\in I} g_i(u\otimes v_i),$$

zusammen. Es reicht zu zeigen, f und g sind invers zueinander. Das wird auf dieselbe Weise wie im Fall von zwei Summanden gezeigt. Es gilt

$$g(f(u\otimes v_i)) = g(u\otimes v_i) = u\otimes\{\delta_{ij}\bullet v_i\}_{j\in I} = u\otimes v_i.$$

Weil die Elemente der Gestalt $u\otimes v_i$ ein Erzeugendensystem von $U \otimes (\oplus_{i\in I} V_i)$ bilden, folgt

$$g\circ f = Id.$$

Weiter gilt

$$f(g(u\otimes v_i)) = f(u\otimes\{\delta_{ij}\bullet v_i\}_{j\in I}) = f(u\otimes v_i) = u\otimes v_i.$$

Weil die Elemente der Gestalt $u\otimes v_i$ ein Erzeugendensystem von $\oplus_{i\in I} (U\otimes V_i)$ bilden, folgt

$$f\circ g = Id.$$

QED.

1.6 Eigenschaften des Tensorprodukts von Elementen

Seien V und W zwei A-Moduln und $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ zwei Familien von Elementen auf V bzw. W. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Sind die v_i in V und die w_j in W linear unabhängig, so sind es auch die $v_i\otimes w_j$ in $V\otimes W$
(vorausgesetzt, die v_i lassen sich zu einer Basis von V und die w_j lassen sich zu einer Basis von W ergänzen - was im Fall, daß A ein Körper ist, stets der Fall ist)[3].

---

[3] Auf die in Klammern angegebenen zusätzlichen Bedingungen kann man verzichten. Der Beweis ohne diese Voraussetzungen erfordert jedoch etwas homomogische Algebra. Seien

$$V' := \sum_{i\in I} A\bullet v_i \subseteq V \text{ und } W' := \sum_{j\in J} A\bullet w_j \subseteq W$$

die von den v_i bzw. w_j erzeugten freien Teilmoduln von V bzw. W. Dann sind die Zeilen und Spalten des folgenden kommutativen Diagramms exakt.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & V'\otimes W' & \xrightarrow{\alpha} & V\otimes W' & \xrightarrow{\beta} & (V/V')\otimes W' & \longrightarrow 0 \\
 & a\downarrow & & b\downarrow & & c\downarrow & \\
0 \longrightarrow & V'\otimes W & \xrightarrow{\gamma} & V\otimes W & \xrightarrow{d} & (V/V')\otimes W & \longrightarrow 0 \\
 & d\downarrow & & e\downarrow & & f\downarrow & \\
0 \longrightarrow & V'\otimes(W/W') & \xrightarrow{\varepsilon} & V\otimes(W/W') & \xrightarrow{\zeta} & (V/V')\otimes(W/W') & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Die Zeilen dieses Diagramms entstehen aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V/V' \longrightarrow 0$$

durch Tensorieren mit W', W und W/W', die Spalten aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow W \longrightarrow W/W' \longrightarrow 0$$

(ii) Bilden die v_i ein Erzeugendensystem von V und die w_j eines von W, so bilden die $v_i \otimes w_j$ eines $V\otimes W$.

(iii) Bilden die v_i eine Basis von V und die w_j eine von W, so bilden die $v_i \otimes w_j$ eine $V\otimes W$.

Unter einer <u>Basis</u> wollen wir hier ein über A linear unabhängiges Erzeugendensystem verstehen.

Beweis. Aussage (ii) wurde bereit bewiesen (vgl. 1.4). Aussage (iii) folgt aus (i) und (ii). Es reicht also, Aussage (i) zu beweisen.
Zum Beweis von (i) können wir die Familien $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ zu Basen von V bzw. W ergänzen, d.h. wir können annehmen,

$(v_i)_{i\in I}$ ist eine Basis von V

$(w_j)_{j\in J}$ ist eine Basis von W.

Wir können dann V und W wie folgt als direkte Summen schreiben.

$$V = \sum_{i\in I} A\bullet v_i = \oplus_{i\in I} A\bullet v_i$$

$$W = \sum_{j\in J} A\bullet w_j = \oplus_{j\in J} A\bullet w_j$$

Nach Bemerkung 1.5 folgt

$$\begin{aligned} V\otimes W &= (\oplus_{i\in I} A\bullet v_i)\otimes(\oplus_{j\in J} A\bullet w_j) \\ &= \oplus_{i\in I}\oplus_{j\in J} (A\bullet v_i)\otimes(A\bullet w_j) \end{aligned}$$

Weil die v_i und w_j eine Basis von V bzw. W bilden, bestehen Isomorphismen

$$A\bullet v_i \longrightarrow A,\ a\bullet v_i \mapsto a, \text{ und } A\bullet w_j \longrightarrow A,\ a\bullet w_j \longrightarrow a,$$

und damit auch Isomorphismen

$$(A\bullet v_i)\otimes(A\bullet w_j) \longrightarrow A\otimes A \longrightarrow A,\ (x\bullet v_i)\otimes(y\bullet w_j) \mapsto x\otimes y \mapsto xy.$$

Als Teilmodul von $V\otimes W$ ist aber

$$(A\bullet v_i)\otimes(A\bullet w_j) = A\bullet v_i\otimes w_j.$$

Auf Grund des Isomorphismus gilt deshalb

$$a\bullet v_i\otimes w_j = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

---

durch Tensorieren mit V', V und V/V'. Auf Grund der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts reicht es, die Injektivität von a, b, c und α, γ, ε zu beweisen. Dazu reicht es zu zeigen, daß die beiden exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V/V' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow W \longrightarrow W/W' \longrightarrow 0$$

zerfallen, d.h. die Moduln in der Mitte sind direkte Summen der beiden äußeren Moduln, d.h. in der Menge der Isomorphie-Klassen der Erweiterungen von V/V' mit V' (bzw. von W/W' mit W') repräsentieren die beiden exakten Sequenzen das Null-Element. Dazu reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Ext}^1_A(V', V/V') = 0 = \mathrm{Ext}^1_A(W', W/W').$$

Das ist aber trivialerweise der Fall, weil V' und W' freie A-Moduln sind.

Zusammen mit

$$V\otimes W = \oplus_{i\in I}\oplus_{j\in J} A\bullet v_i\otimes w_j$$

bedeutet dies:

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij}\bullet v_i\otimes w_j = 0 \Leftrightarrow a_{ij}\bullet v_i\otimes w_j = 0 \text{ für beliebige } (i,j)\in I\times J$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \text{ für beliebige } (i,j)\in I\times J$$

Mit anderen Worten, die $v_i\otimes w_j$ sind linear unabhängig.

QED.

Bemerkungen

(i) Aussage (iii) bietet die Möglichkeit, die Existenz des Tensorproduktes zu beweisen für den Fall, daß A ein Körper ist: Man wähle in V und W jeweils eine Basis (v_i) bzw. (w_j) und definere $V\otimes W$ als den Raum mit der Basis $\{v_i\otimes w_j\}$. Man hat dann allerdings die Unabhängigkeit der Konstruktion von der Wahl der Basen zu beweisen. Unser Beweis wird von vornherein unabhängig von jeder Basis sein.

(ii) Ausssage (i) ist für Ringe A, die keine Körper sind im allgemeinen falsch ohne die zusätzliche in Klammern angegebene Bedingung. Das nachfolgende Beispiel illustriert dieses Phänomen.

Beispiel.

Seien k ein Körper und A = k[x] der Polynomring über k in einer Unbestimmten x. Weiter sei

$$B = A[y]/(x\bullet y)$$

Jedes Polynom von A[y] = A[x, y] läßt sich auf genau eine Weise in der Gestalt

$$f(x) + y\bullet g(y) + xy\bullet h(x,y) \text{ mit } f\in k[x],\ g\in k[y],\ h\in k[x,y].$$

schreiben. Der erste Summand enthält alle Summanden, in denen y nicht vorkommt, der zweite alle Summanden, in denen x nicht vorkommt - außer dem Absolutglied - und der dritte alle übrigen Summanden. Auf Grund dieser Zerlegung kann man B identifizieren mit

$$B = A \oplus y\bullet k[y].$$

Insbesondere ist $1 \in B$ linear unabhängig über dem Teilring A. Weiter ist x linear unabhängig über A: mit $a\bullet x = 0$ in A gilt $a = 0$. Betrachten wir

$$x\otimes 1 \in A\otimes_A B$$

Beim Isomorphismus

$$A\otimes_A B \xrightarrow{\cong} B,\ a\otimes b \mapsto b,$$

geht $x\otimes 1$ über in $x \in B$.

1.7 Die Koordinaten eines Tensors

Seien V und W zwei A-Moduln und

$$(v_i)_{i\in I} \text{ und } (w_j)_{j\in J}$$

Basen von V bzw. W. Dann läßt sich jeder Tensor

$$t \in V\otimes W$$

in der Gestalt

$$t = \sum_{i\in I, J\in J} c^{ij}\, v_i \otimes w_j$$

schreiben mit eindeutig bestimmten $c^{ij}\in K$. die c^{ij} heißen <u>Koordinaten des Tensors</u> t bezüglich der gegebenen Basen.

Sind endlich viele A-Moduln

$$V_1 , ... , V_r$$

gegeben und für jedes i eine Basis

$$\{ v_{j,i} \}_{j\in J_i}$$

von V_i so hat man für jeden Tensor

$$t\in V_1 \otimes ... \otimes V_r$$

eindeutig bestimmte Elemente

$$c^{i_1 i_2 ... i_r}\in K$$

mit

$$t = \sum_{i_1\in J_1,...,i_r\in J_r} c^{i_1 i_2 ... i_r}\, v_{i_1,1}\otimes ...\otimes v_{i_r,r} .$$

Die $c^{i_1 i_2 ... i_r}$ heißen dann <u>Koordinaten des Tensors</u> t bezüglich der gegebenen Basen.

1.8 Das Verhalten der Koordinaten bei Basiswechsel

Seien

$$V_1 , ... , V_r$$

endlich viele A-Moduln und seien für jedes $i \in\{1,...,r\}$ zwei Basen

$$v_i := \{ v_{j,i} \}_{j\in J_i} \qquad v'_i := \{ v'_{j,i} \}_{j\in J_i}$$

von V_i gegeben. Wir betrachten die Koordinaten eines Tensors

$$t\in V_1 \otimes ... \otimes V_r$$

bezüglich der beiden Familien von Basen:

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i_1\in J_1,...,i_r\in J_r} c^{i_1 i_2 ... i_r} v_{i_1,1}\otimes ...\otimes v_{i_r,r} \\ &= \sum_{i_1\in J_1,...,i_r\in J_r} c'^{i_1 i_2 ... i_r} v'_{i_1,1}\otimes ...\otimes v'_{i_r,r}. \end{aligned}$$

Bezeichne $A := M(Id) = (a^i_{j\ell})$ die Basiswechelsmatrix für den Übergang der Basis v_ℓ zur Basis v'_ℓ,

$$v_{j,\ell} = \sum_{\alpha\in J_\ell} a^{\alpha}_{j\ell}\, v'_{\alpha,\ell}$$

Dann besteht zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Koordinaten von t die folgende Relation.

$$c'^{i_1\dots i_r} = \sum_{\alpha_1\in J_1,\dots,\alpha_r\in J_r} a^{i_1}_{\alpha_1,1}\cdot\dots\cdot a^{i_r}_{\alpha_r,r} c^{\alpha_1\dots\alpha_r}$$

Beweis. Es gilt

$$t = \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r} c^{i_1\dots i_r} v_{i_1,1}\otimes\dots\otimes v_{i_r,r}$$

$$= \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r} c^{i_1 i_2\dots i_r} \Big(\sum_{\alpha_1\in J_1} a^{\alpha_1}_{i_1,1} v'_{\alpha_1,1}\Big)\otimes\dots\otimes\Big(\sum_{\alpha_r\in J_r} a^{\alpha_r}_{i_r,r} v'_{\alpha_r,r}\Big)$$

$$= \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r}\ \sum_{\alpha_1\in J_1,\dots,\alpha_r\in J_r} a^{\alpha_1}_{i_1,1}\cdot\dots\cdot a^{\alpha_r}_{i_r,r} c^{i_1 i_2\dots i_r} v'_{\alpha_1,1}\otimes\dots\otimes v'_{\alpha_r,r}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung.
QED.

1.9 Bemerkungen zum den Tensoren der Physik

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum,

$$v_1,\dots,v_n\in V \qquad (1)$$

eine Basis von V und

$$v^1,\dots,v^n\in V^* \qquad (2)$$

die zugehörige duale Basis. Bezeichne

$$V^{\otimes r} \text{ bzw. } V^{*\otimes s}$$

die r-te Tensorpotenz von V bzw. die s-te Tensorpotenz von V*, d.h. das Tensorprodukt von r Exemplaren des Raumes V (bzw. s Exemplaren des Raumes V*). Ein r-fach kovarianter und s-fach kontravarianter Tensor im ist ein Element von

$$V^{\otimes r}\otimes V^{*\otimes s},$$

wobei man sich den Tensor durch dessen Koordinaten bezüglich der Basen (1) und (2) gegeben denkt.
Bemerkung
Seien

$$v'_1,\dots,v'_n\in V$$

eine zweite Basis von V,

$$v'^1,\dots,v'^n\in V^*$$

die zugehörige duale Basis und $A = M^v_{v'}(Id) = (a^i_j)$ die Basiswechselmatrix für den Übergang von v nach v', d.h.

$$v_i = \sum_{\alpha=1}^{n} a^{\alpha}_i v'_\alpha .$$

Bezeichne $B = (b^i_j)$ die zu B inverse Matrix (d.h. die Basiswechselmatrix $B = M^{v'}_{v}(Id)$.

Dann gilt

(1) $$v^j = \sum_{\alpha=1}^{n} b^j_\alpha v'^\alpha$$

Für die Koordinaten eines Tensors $t \in V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$,

$$t = \sum_{i_1 \in J_1,\dots,i_r \in J_r} c^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_s}$$

$$= \sum_{i_1 \in J_1,\dots,i_r \in J_r} c'^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} v'_{i_1} \otimes \dots \otimes v'_{i_r} \otimes v'^{j_1} \otimes \dots \otimes v'^{j_s}.$$

besteht dann die folgende Relation.

$$c'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \sum_{\alpha_1,\beta_1 \in J_1,\dots,\alpha_r,\beta_r \in J_r} a^{i_1}_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a^{i_r}_{\alpha_r} b^{\beta_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot b^{\beta_r}_{j_r} c^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}$$

Beweis. Nach 1.8 reicht es (1) zu beweisen, d.h.es reicht zu zeigen, die rechte Seite von (1) genügt den definierenden Bedingungen für die duale Basis. Es gilt

$$<v_i, \sum_{\alpha=1}^{n} b^j_\alpha v'^\alpha> = (\sum_{\alpha=1}^{n} b^j_\alpha v'^\alpha)(v_i) = (\sum_{\alpha=1}^{n} b^j_\alpha v'^\alpha)(\sum_{\beta=1}^{n} a^\beta_i v'_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} b^j_\alpha a^\beta_i v'^\alpha(v'_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} b^j_\alpha a^\beta_i \delta^\alpha_\beta$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} b^j_\alpha a^\alpha_i$$

$$= \delta^j_i$$

Damit ist (1) bewiesen, und damit die Behauptung.

QED.

Bemerkungen

(i) In der Physik betrachtet man im allgemeinen Koordinatenwechsel zwischen "krummlinigen Koordinaten", sagen wir

$$(x'^1 , \dots , x'^n) = f(x^1,\dots,x^n).$$

An die Stelle der Matrix $A = (a^i_j)$ tritt dann die Matrix der Linearisierung von f,

$$a^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$$

Für die Matrix $B = A^{-1}$ gilt dann (nach der Kettenregel)

$$b^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} .$$

(ii) <u>Einsteinsche Summenkonvention</u>. In jedem Ausdruck, in welchen ein und derselbe Index sowohl als oberer als auch als unterer Index auftritt, wird über diesen Index summiert (maximaler Summationsbereich).

Unter Verwendung dieser Konvention hätten wir in den obigen Rechnungen sämtliche Summenzeichen weglassen können.

1.10 Die Existenz des Tensorprodukts

Für je zwei K-Vektorräume V und W existiert das Tensorprodukt.

Vorbemerkung. Wir haben gesehen, falls das Tensorprodukt $V\otimes W$ existiert, so wird es von den Tensoren $v\otimes w$ mit $v\in V$ und $w\in W$ erzeugt. Mit anderen Worten, $V\otimes W$ ist ein Faktorraum des von den Vektoren $v\otimes w$ frei erzeugten Vektoraums. Wir nutzen jetzt diese Tatsache zur Konstruktion von $V\otimes W$, d.h. wir werden $V\otimes W$ als Faktorraum eines frei erzeugten Vektorraums definieren. Anstelle der Bezeichnung $v\otimes w$ werden wir für die Elemente des frei erzeugten Vektorraum das Symbol (v,w) wählen.

Beweis. Sei M die Menge $V\times W$ der Paare (v,w) mit $v\in V$ und $w\in W$,

$$M = V\times W.$$

Betrachten wir den von M frei erzeugten K-Vektorraum

$$F(M).$$

Dieser Vektorraum besteht aus allen endlichen K-Linearkombinationen von Paaren der Gestalt (v,w) mit $v\in V$ und $w\in W$,

$$c_1\cdot(v_1,w_1) + ... + c_r\cdot(v_r,w_r)$$

mit $c_i\in K$, $v_i\in V$, $w_i\in W$ für i = 1,...,r.

<u>Bemerkung</u>. Man beachte, F(M) ist unendlich-dimensional, sobald M unendlich viele Elmente enthält, d.h. selbst wenn V und W endliche Dimension haben, kann die Dimension von F(M) unendlich sein, denn nach Konstruktion bilden die Elemente von M gerade eine Basis von F(M),

$$\dim F(M) = \# M.$$

Wir konstruieren jetzt den Unterraum R, nach den wir den Raum F(M) faktorisieren wollen. Der Raum R werde von allen Vektoren der folgenden Gestalt erzeugt.

$$((v, w' + w'') - (v,w') - (v,w'') \text{ mit } v\in V,\ w',w''\in W \qquad (1)$$

$$(v' + v'', w) - (v',w) - (v'',w) \text{ mit } v',v''\in V,\ w\in W \qquad (2)$$

$$(cv, w) - c(v,w) \text{ mit } c\in K,\ v\in V,\ w\in W \qquad (3)$$

$$(v, cw) - c(v,w) \text{ mit } c\in K,\ v\in V,\ w\in W. \qquad (4)$$

Dabei schreiben wir vereinfachend (v,w) anstelle von $1\cdot(v,w)$ und -(v,w) anstelle von $(-1)\bullet(v, w)$ für $v\in V$, $w\in W$.

<u>Bemerkung</u>. Dieser Unterraum R ist im allgemeinen ebenfalls sehr groß. Wir werden sehen, er ist so groß, daß der Faktoraum F(M)/R im Fall von endlich-dimensionalen Räumen endlich-dimensional wird.

Wir setzen

$$V\otimes W := F(M)/R.$$

Bezeichne

$$\gamma: F(M) \to F(M)/R$$

die natürliche Abbildung. Weiter setzen wir

$$v\otimes w := \gamma((v,w)).$$

Wir haben zu zeigen, die Abbildung

$$\varphi := \gamma|_{V\times W}: V\times W \to F(M)/R,\ (v,w) \mapsto \gamma((v,w)) = v\otimes w$$

ist bilinear und hat die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts.

Linearität von φ bezüglich des ersten Arguments. Wir haben zu zeigen

1. $\varphi(v'+v'', w) - \varphi(v',w) - \varphi(v'',w) = 0.$
2. $\varphi(cv,w) - c\cdot\varphi(v,w) = 0.$

Die linke Seite von 1. ist gleich

$$\varphi(v'+v'', w) - \varphi(v',w) - \varphi(v'',w) \qquad = \gamma((v'+v'',w) - (v',w) - (v',w))$$

Das Argument von γ auf der rechten Seite ist gerade ein Element der Gestalt (2), liegt also im Unterraum R. Da der Kern von γ gerade der Unterraum R ist, steht auf der rechten Seite der Nullvektor.

Die linke Seite von 2. ist gleich

$$\varphi(cv,w) - c\cdot\varphi(v,w) = \gamma((cv,w) - c\cdot(v,w))$$

Das Argument von γ auf der rechten Seite ist gerade ein Element der Gestalt (3), liegt also im Unterraum R. Da der Kern von γ gerade der Unterraum R ist, steht auf der rechten Seite der Nullvektor.

Linearität von φ bezüglich des zweiten Arguments. Man verwendet dieselben Argumente wie beim Beweis der Linearität bezüglich der ersten Variablen, wobei man die Elemente der Gestalt (1) und (4) von R (anstelle der Elemente der Gestalt (2) und (3)) benutzt.

Die Unversalitätseigenschaft der Abbildung φ. Wir haben zu zeigen, jede K-lineare Abbildung

$$b: V\times W \to U$$

faktorisiert sich eindeutig über die Abbildung φ, d.h. zu gegebenen b gibt es genau ein lineare Abbildung $\tilde{b}$: F(M)/R $\to$ U mit

$$b(v,w) = \tilde{b}(\varphi(v,w)) \tag{5}$$

für alle $v\in V$ und alle $w\in W$.

Beweis der Eindeutigkeit von $\tilde{b}$.Nach Konstruktion bilden die Vektoren der Gestalt (v,w) ein Erzeugendensystem von F(M). Deshalb bilden die Bilder der (v,w) bei der natürlichen Surjektion

$$\gamma: F(M) \to F(M)/R$$

ein Erzeugendensystem von F(M)/R, d.h. die Elemente

$$\gamma((v,w)) = \varphi(v,w) \text{ mit } v\in V \text{ und } w\in W$$

bilden ein Erzeugendensystem von F(M)/R. Bedingung (5) (rückwärts gelesen) legt daher die Werte von $\tilde{b}$ auf einem Erzeugendensystem von F(M)/R fest. Da $\tilde{b}$ linear sein soll, ist damit die gesamte Abbildung $\tilde{b}$ festgelegt.

Bemerkungen zum weiteren Beweis-Verlauf.

(i) Zum Beweis der Existenz von $\tilde{b}$ könnten wir (5) als Definition verwenden und dann die Korrektheit der Definition beweisen. Obwohl man auf diese Weise durchaus zum Ziel kommt, wollen wir hier anders vorgehen, um die bereits bewiesenen Aussagen etwas effektiver nutzen zu können.

(ii) Aus der Existenz der Abbildung $\tilde{b}$: F(M)/R $\to$ U folgt natürlich auch die Existenz der Zusammensetzung von $\tilde{b}$ mit der natürlichen Abbildung γ:F(M) $\to$ F(M)/R. Wir werden von dieser Zusammensetzung ausgehen und mit deren Hilfe die Existenz von $\tilde{b}$ beweisen.

Beweis der Existenz von $\tilde{b}$. Betrachten wir die K-lineare Abbildung

$$b': F(M) \to U \text{ mit } (v,w) \mapsto b(v,w).$$

Da die Paare der Gestalt (v,w) eine Basis von F(M) bilden, gibt es genau eine lineare Abbildung, die für jedes $v\in V$ und jedes $w\in W$ im Basisvektor $(v,w) \in F(M)$ den vorgegebenen Wert b(v,w) annimmt.

Zum Beweis der Existenz von $\tilde{b}$ reicht es zu zeigen, der Unterraum $R\subseteq F(M)$ liegt im Kern von b',

$$R \subseteq \ker(b'), \tag{6}$$

denn auf Grund der von uns bewiesenen Universalitätseigenschaft des Faktorraums faktorisiert sich dann b' in eindeutiger Weise über die natürliche Abbildung $\gamma:F(M)\to F(M)/R$ (vgl. die Bemerkung am Ende von 1.1),

$$b': F(M) \xrightarrow{\gamma} F(M)/R \xrightarrow{\tilde{b}'} U,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{b}'$ mit $b' = \tilde{b}'\circ\gamma$, d.h. mit

$$b(v,w) = b'((v,w)) = \tilde{b}'(\gamma(v,w)) = \tilde{b}'(\varphi(v,w)).$$

Die Abbildung

$$\tilde{b}': F(M)/R \to U, (v,w) +R \mapsto b(v,w)$$

ist somit gerade die von uns gesuchte Abbildung $\tilde{b}$.

Wir haben noch (6) zu beweisen. Dazu reicht es zu zeigen, die Abbildung b' bildet die Elemente eines Erzeugendensystems von R in die Null ab. Es genügt somit zu zeigen, daß die Elemente der Gestalt (1), (2), (3), (4) bei b' in die Null abgebildet werden. Das ist aber gerade eine Folge der Bilinearität von b. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} &b'((v, w' + w'') - (v,w') - (v,w'')) \\ &\quad = b'(v, w' + w'') - b'(v,w') - b'(v,w'') \\ &\quad = b(v, w' + w'') - b(v,w') - b(v,w'') \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen besteht auf Grund der Linearität von b', das zweite nach Definition von b' und das dritte wegen der Liniearität von b bezüglich des zweiten Arguments.

QED.

Bemerkung

Im Fall endlich-dimensionaler Vektorräume V und W ist der Existenzbeweis für das Tensorprodukt einfacher. Die Definition des Tensorprodukt besagt gerade, $V\otimes W$ ist ein Vektorraum mit

$$\mathrm{Hom}_K(V\otimes W, K) = L(V,W;K).$$

Mit anderen Worten, der zu $V\otimes W$ duale Vektorraum ist gerade L(V,W,K). Da man im Fall von endlich-dimensionalen Räumen das doppelte Dual eines Vektorraum mit dem Ausgangsraum identifizieren kann, folg

$$V\otimes W = L(V,W;K)^*$$

für $\dim V < \infty$ und $\dim W < \infty$. Dies kann man im endlich-dimensionalen Fall als Definition verwenden. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß $L(V,W;K)^*$ bezüglich der bilinearen Abbildung

$$V\times W \to L(V,W; K)^*, (v,w) \mapsto (b \mapsto b(v,w))$$

tatsächlich die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts hat.

1.11 Die Funktorialität des Tensorprodukts

(i) Seien $f: V\to V'$ und $g: W\to W'$ zwei A-lineare Abbildungen. Dann gibt es genau eine A-lineare Abbildung $f\otimes g$, für welche das folgenden Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} V\times W & \xrightarrow{f\times g} & V'\times W' \\ \rho_{V,W}\downarrow & & \downarrow\rho_{V',W'} \\ V\otimes W & \xrightarrow{f\otimes g} & V'\otimes W' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (v,w) & \mapsto & (f(v),g(w)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ v\otimes w & \mapsto & f(v)\otimes g(w) \end{array}$$

Mit anderen Worten, $f\otimes g$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$(f\otimes g)(v\otimes w) = f(v)\otimes g(w) \text{ für } v\in V \text{ und } w\in W.$$

(ii) Für beliebige A-lineare Abbildungen $f: V\to V'$, $f':V'\to V''$, $g:W\to W'$, $g':W'\to W''$ gilt

$$(f'\otimes g')\circ(f\otimes g) = (f'\circ f)\otimes(g'\circ g).$$

(iii) Das Tensorprodukt der beiden identischen Abbildungen

$$Id_V : V \to V \text{ und } Id_W: W \to W$$

ist die identische Abbildung von $V\otimes W$,

$$Id_V\otimes Id_W = Id_{V\otimes W} .$$

(iv) Seien $f: V \twoheadrightarrow V'$ und $g: W \twoheadrightarrow W'$ zwei surjektive A-lineare Abbildungen. Dann gilt:

a) $Im(f\otimes g) = V'\otimes W'$

b) $Ker(f\otimes g)$ wird erzeugt von $\{ v\otimes w \in V\otimes W \mid v \in Ker(f) \text{ oder } w\in Ker(g)\}$

Beweis. Zu (i). Da f und g linear sind und $\rho_{V',W'}$ bilinear ist, ist die Zusammensetzung

$$\rho_{V',W'}\circ(f\times g)$$

bilinear. Die Existenz und Eindeutigkeit von $f\otimes g$ folgt deshalb aus der Universalitätseigenschaft von $\rho_{V,W}$.

Zu (ii). Für $v\in V$ und $w\in W$ gilt

$$\begin{aligned}((f'\otimes g')\circ(f\otimes g))(v\otimes w) &= (f'\otimes g')(f(v)\otimes g(w)) \\ &= f'(f(v))\otimes g'(g(w)) \\ &= (f'\circ f(v))\otimes(g'\circ g(w)) \\ &= ((f'\circ f)\otimes(g'\circ g))(v\otimes w).\end{aligned}$$

Die beiden linearen Abbildungen $(f'\otimes g')\circ(f\otimes g)$ und $(f'\circ f)\otimes(g'\circ g)$ haben für alle Vektoren der Gestalt $v\otimes w$ mit $v\in V$ und $w\in W$ denselben Wert. Da die $v\otimes w$ ein Erzeugendensystem von $V\otimes W$ bilden, folgt

$$(f'\otimes g')\circ(f\otimes g) = (f'\circ f)\otimes(g'\circ g).$$

Zu (iii). Für $v\in V$ und $w\in W$ gilt

$$(Id_V\otimes Id_W)(v\otimes w) = (Id_V(v))\otimes(Id_W(w)) = v\otimes w,$$

d.h. die lineare Abbildung $Id_V\otimes Id_W$ hat auf allen Vektoren des Erzeugendensystems

$$\{v\otimes w\}_{v\in V, w\in W}$$

dieselben Werte wie die identische Abbildung $Id_{V\otimes W}$. Deshalb gilt

$$Id_V \otimes Id_W = Id_{V\otimes W}.$$

Zu (iv) Sei $T \subseteq V\otimes W$ der von den Elementen der Menge

$$X := \{ v\otimes w \in V\otimes W \mid v \in Ker(f) \text{ oder } w\in Ker(g)\}$$

erzeugte A-Teilmodul von $V\otimes W$. Für $v\otimes w \in X$ gilt

$$(f\otimes g)(v\otimes w) = f(v)\otimes g(w) = 0,$$

also $v\otimes w \in Ker(f\otimes g)$, also

$$T \subseteq Ker(f\otimes g). \qquad (1)$$

Wir haben die umgekehrt Inklusion zu beweisen Wegen (1) faktorisiert sich

$$f\otimes g\colon V\otimes W \longrightarrow V'\otimes W'$$

über $V\otimes W/T$:

$$f\otimes g\colon V\otimes W \xrightarrow{\rho} V\otimes W/T \xrightarrow{\tilde{\rho}} V'\otimes W'.$$

Dabei sei ρ die natürliche Surjektion auf den Faktormodul und $\tilde{\rho}$ die A-lineare Abbildung mit

$$\tilde{\rho}(v\otimes w \bmod T) = f(v)\otimes g(w) \text{ für beliebige } v \in V \text{ und } w\in W.$$

Zum Beweis des Gleichheitszeichens in (1) reicht es zu zeigen, daß $\tilde{\rho}$ bijektiv ist. Aus der Bijektivität von $\tilde{\rho}$ ergibt sich außerdem, daß $f\otimes g$ als Zusammensetzung der surjektiven Abbildungen ρ und $\tilde{\rho}$ surjektiv ist, d.h. es gilt auch Aussage a).

Betrachten wir die Abbildung

$$V' \times W' \longrightarrow V\otimes W/T,\ (v', w') \mapsto v\otimes w \bmod T. \qquad (2)$$

Dabei seien die Elemente $v\in V$ und $w\in W$ so gewählt, daß

$$f(v) = v' \text{ un } g(w) = w'$$

gilt. Wir haben zu zeigen, daß diese Definition korrekt ist, d.h. daß sie nicht von der speziellen Wahl der Elemente v und w abhängt. Sei $v_1\in V$ und $w_1\in W$ ein weiterers Paar von Elementen mit

$$f(v_1) = v' \text{ und } g(w_1) = w'.$$

Dann gilt

$$f(v_1\text{-}v) = 0 \text{ und } g(w_1\text{-}w) = 0$$

also

$$v_1\text{-}v \in Ker(f) \text{ und } w_1\text{-}w \in Ker(g)$$

also

$$v_1\otimes w_1 - v\otimes w = (v_1\text{-}v)\otimes w_1 + v\otimes(w_1\text{-}w) \in T$$

also $v_1\otimes w_1 \bmod T = v\otimes w \bmod T$.

Die Abbildung (2) ist also korrekt definiert. Nach Konstruktion ist sie bilinear über A, induziert also eine A-lineare Abbildung

$$V' \otimes W' \longrightarrow V\otimes W/T,\ (v', w') \mapsto v\otimes w \bmod T. \qquad (3)$$

Ein Vergleich mit der Abbildungsvorschrift von $\tilde{\rho}$ zeigt, daß (3) invers ist zu $\tilde{\rho}$. Deshalb ist $\tilde{\rho}$ ein Isomorphismus, und es gilt

$$\mathrm{Ker}(f\otimes g) = \mathrm{Ker}(\rho) = T.$$

Es gilt b) und wie schon erwähnt auch a).
QED.

1.12 Additive Kategorien und Funktoren

Eine Kategorie C heißt additiv, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Für je zwei Objekte X', X" von C existiert deren direkte Summe, d.h. ein Objekt X zusammen mit zwei Morphismen

$$i': X' \longrightarrow X \text{ und } i'': X'' \longrightarrow X$$

mit der Eigenschaft, daß es für beliebige Morphismen

$$j': X' \longrightarrow Y \text{ und } j'': X'' \longrightarrow Y$$

genau einen Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ gibt, für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[dr, "j'"'] & X \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[l, "i''"'] \arrow[dl, "j''"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.[4] Mit anderen Worten, die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X', Y) \times \mathrm{Hom}(X'', Y),\ f \mapsto (f\circ i', f\circ i'')$$

soll für jedes Objekt Y von C bijektiv sein.
Die Morphismen i', i" heißen dann die natürlichen Injektionen der direkten Summe X.

2. Für je zwei Objekte X', X" von C existiert deren direktes Produkt, d.h. ein Objekt X zusammen mit zwei Morphismen

$$p': X \longrightarrow X' \text{ und } p'': X \longrightarrow X''$$

mit der Eigenschaft, daß es für beliebige Morphismen

$$q': Y \longrightarrow X' \text{ und } q'': Y \longrightarrow X''$$

genau einen Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ gibt, für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' & X \arrow[l, "p'"'] \arrow[r, "p''"] & X'' \\ & Y \arrow[ul, "q'"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "q''"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.[5] Mit anderen Worten, die Abbildung

---

[4] Im Fall der Kategorie A-Mod der A-Moduln kann man $X = X'\oplus X''$ setzen und für i', i" die natürlichen Einbettungen verwenden. Die Abbildung f ist dann gegeben durch

$$f((x', x'')) = f((x',0) + (0,x'')) = f((x',0)) + f((0, x'')) = f(i'(x')) + f(i''(x'')) = j'(x') + j''(x'').$$

[5] Im Fall der Kategorie A-Mod kann man $X = X'\oplus X''$ setzen und für p', p" die natürlichen Projektionen verwenden. Die Abbildung f ist dann gegeben durch

$$f(y) = (f'(y), f''(y))$$
$$f'(y) = p'(f(y)) = q'(y)$$
$$f''(y) = p''(f(y)) = q''(y),$$

also

$$f(y) = (q'(y), q''(y)),$$

d.h. q' und q" sind gerade die Koordinatenfunktionen von f.

$$\mathrm{Hom}(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, X') \times \mathrm{Hom}(Y, X''); f \mapsto (p'\circ f, p''\circ f)$$

soll für jedes Objekt Y von C bijektiv sein.
Die Morphismen p', p" heißen dann die <u>natürlichen Projektionen</u> des direkten Produkts X.

3. Für je zwei Objekte X und Y von C besitzt $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ die Struktur einer (additiven) abelschen Gruppe, wobei die Morphismen-Komposition

$$\mathrm{Hom}_C(X, Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(X, Z), (f, g) \mapsto g\circ f,$$

für je drei Objekte X, Y, Z $\mathbb{Z}$-bilinear in f und g ist (d.h. es gelten die Distributivgesetze).[6]

4. Es gibt ein Objekt O von C mit $1_O = 0$.[7] Es wird <u>Null-Objekt</u> genannt.

Ein Funktor

$$F: C \longrightarrow D$$

von abelschen Kategorien C, D heißt <u>additiv</u>, wenn für je zwei Objekte X,X' von C die Abbildung

$$F: \mathrm{Hom}(X, X') \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), F(X')), f \mapsto F(f),$$

ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Bemerkungen

(i) Je zwei 0-Objekte sind isomorph.

(ii) Ist O ein Nullobjekt, so sind die Hom-Mengen Hom(O,X) und Hom(X,O) für jedes Objekt X einelementig,

$$\mathrm{Hom}(O,X) = \{0_{OX}\}$$
$$\mathrm{Hom}(X,O) = \{0_{XO}\}$$

(iii) Ein Morphismus f: $X \longrightarrow Y$ ist genau dann eine Null-Morphismus (d.h. das neutrale Element von Hom(X,Y)), wenn sich f über ein Nullobjekt faktorisiert,

$$f: X \longrightarrow O \longrightarrow Y.$$

(iv) Für je drei Objekte X_0, X_1, X von C sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) X ist direkte Summe der X_α, $\alpha = 0,1$.

(b) X ist direktes Produkt der X_α, $\alpha = 0,1$.

(c) Es gilt Morphismen $p_\alpha: X \longrightarrow X_\alpha$ und $i_\alpha: X_\alpha \longrightarrow X$ ($\alpha = 0,1$) mit

1. $p_\alpha i_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ für $\alpha, \beta \in \{0,1\}$
2. $1_X = i_0 p_0 + i_1 p_1$

(v) Ein additiver Funktor überführt direkte Summen in direkte Summen und direkte Produkte in direkte Produkte.

(vi) Das Bild eines 0-Objekts bei einem additiven Funktor ist ein 0-Objekt.

Beweis. <u>Zu</u> (i). Seien X und Y zwei 0-Objekte und $0_{XY}: X \longrightarrow Y$ und $0_{YX}: Y \longrightarrow X$ die neutralen Elemente der entsprechenden Hom-Mengen. Dann gilt wegen der Bilinearität der Morphismen-Komposition

$$0_{XY}\circ 0_{YX} = 0_Y = 1_X \text{ und } 0_{YX}\circ 0_{XY} = 0_Y = 1_Y,$$

---

[6] Die Hom-Mengen von A-Mod sind sogar A-Moduln und die Morphismen-Komposition ist bilinear über A.

[7] Ein A-Modul X, für welchen der identische Morhismus gleich dem 0-Morphismus ist, ist gleich dem trivialen Modul 0.

d.h. 0_{XY} und 0_{YX} sind zueinander inverse Morphismen, also Isomorphismen.

Zu (ii). Sei $f \in \mathrm{Hom}(O, X)$. Wir betrachten die Zusammansetzeung

$$O \xrightarrow{1_O} O \xrightarrow{f} X.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f &= f\circ 1_O \\ &= f\circ 0_{OO} && \text{(weil O ein Nullobjekt ist, gilt } 1_O = 0_{OO}\text{)} \\ &= 0_{OX} && \text{(die Morphismen-Komposition ist bilinear).} \end{aligned}$$

Sei $g \in \mathrm{Hom}(X, O)$. Wir betrachten die Zusammensetzung

$$X \xrightarrow{g} O \xrightarrow{1_O} O.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} g &= 1_O\circ g \\ &= 0_{OO}\circ g && \text{(weil O ein Nullobjekt ist, gilt } 1_O = 0_{OO}\text{)} \\ &= 0_{XO} && \text{(die Morphismen-Komposition ist bilinear).} \end{aligned}$$

Zu (iii). Angenommen, f faktorisiert sich über ein Nullobjekt O, d.h. es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \\ & O \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Dann gilt nach (ii) $\alpha \in \mathrm{Hom}(X,O) = \{0_{XO}\}$ also $\alpha = 0_{XO}$, also

$$f = \beta\circ\alpha = \beta\circ 0_{XO} = 0_{XY}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil die Morphismen-Komposition bilinear ist.
Nehmen wir umgekehrt an, f ist ein Null-Morphismus,

$$f = 0_{XY}.$$

Bezeichne O irgendein Nullobjekt. Weil die Morphismen-Komposition bilinear ist, gilt

$$0_{OY}\circ 0_{XO} = 0_{XY} = f,$$

d.h. f faktorisiert sich über O.

Zu (iv). (a) ⇒ (c). Seien $i_\alpha: X_\alpha \longrightarrow X$ die natürlichen Injektionen der direkten Summe X. Dann gibt es Morphismen $p_\alpha: X \longrightarrow X_\alpha$, $\alpha=0,1$, für welche die folgenden Diagramme kommutativ sind.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "1_{X_\alpha}"'] & X \arrow[d, "p_\alpha"] & X_\beta \arrow[l, "i_\beta"'] \arrow[dl, "0_{X_\beta}"] \\ & X_\alpha & \end{tikzcd} \quad \text{für } \alpha, \beta=0,1 \text{ und } \alpha+\beta = 1.$$

Mit anderen Worten, die Bedingungen 1 sind erfüllt. Wir haben noch zu zeigen, die Bedingung 2 ist ebenfalls erfüllt.

Auf Grund der Definition der direkten Summe ist für jedes Objekt Y die folgende Abbildung bijektiv.

$$\mathrm{Hom}_C(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(X_0, Y) \times \mathrm{Hom}_C(X_1, Y),\ f \mapsto (f \circ i_0, f \circ i_1).$$

Zum Beweis der Identität von 2 reicht es somit, wenn wir zeigen, es gelten die Identitäten,

$$i_\alpha = i_\alpha p_\alpha i_\alpha + i_\beta p_\beta i_\alpha \text{ für } \alpha, \beta=0,1 \text{ und } \alpha+\beta = 1.$$

welche aus der Identität 2 durch Zusammensetzen mit den i_α entstehen. Auf Grund der Bedingungen 1 gilt aber

$$i_\alpha p_\alpha i_\alpha = i_\alpha 1_{X_\alpha} = 1_\alpha \text{ und } i_\beta p_\beta i_\alpha = i_\beta 0_{X_\beta X_\alpha} = 0_{XX_\alpha}$$

Damit ist auch Bedingung 2 erfüllt.

<u>(c) $\Rightarrow$ (a)</u>. Wir haben die Bijektivität der Abbildung

$$\varphi:\mathrm{Hom}_C(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(X_0, Y) \times \mathrm{Hom}_C(X_1, Y),\ f \mapsto (f \circ i_0, f \circ i_1).$$

zu beweisen (für jedes Objekt Y von C). Dazu reicht es zu zeigen, die folgende Abbildung ist invers zu φ.

$$\psi:\mathrm{Hom}_C(X_0, Y) \times \mathrm{Hom}_C(X_1, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(X, Y),\ (f, g) \mapsto f \circ p_0 + g \circ p_1.$$

Für jeden Morphismus $u: X \longrightarrow Y$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi(u)) &= \psi((u \circ i_0, u \circ i_1)) \\
&= u \circ i_0 \circ p_0 + u \circ i_1 \circ p_1 \\
&= u \circ (i_0 \circ p_0 + i_1 \circ p_1) \\
&= u \circ 1 && \text{(wegen Bedingung 2)} \\
&= u
\end{aligned}$$

Also gilt $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. Weiter gilt für beliebige $f: X_0 \longrightarrow Y$ und $g: X_1 \longrightarrow Y$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\psi(f,g)) &= \varphi(f \circ p_0 + g \circ p_1) \\
&= ((f \circ p_0 + g \circ p_1) \circ i_0, (f \circ p_0 + g \circ p_1) \circ i_1) \\
&= (f \circ p_0 \circ i_0 + g \circ p_1 \circ i_0, f \circ p_0 \circ i_1 + g \circ p_1 \circ i_1) \\
&\ (f, g) && \text{(wegen der Bedingungen 1).}
\end{aligned}$$

Die Abbildungen φ und ψ sind also zueinander inverse Bijektionen.

<u>(b) $\Leftrightarrow$ (c)</u>. Die zu einer additiven Kategorie duale Kategorie ist ebenfalls additiv. Die bereits bewiesenen Aussagen gelten somit für die zu C duale Kategorie ebenfalls. Direkte Summen bzw. Produkte werden aber in der dualen Kategorie zu direkten Produkten bzw. Summen. Mit (a) $\Leftrightarrow$ (c) gilt somit auch (b) $\Leftrightarrow$ (c).

<u>Zu</u> (v). Die Bedingungen von (ii)(c) bleiben erhalten, wenn man einen additiven Funktor anwendet.

<u>Zu</u> (vi). Sei X ein Nullobjekt, d.h. es gelte

$$1_X = 0_X \text{ in } \mathrm{Hom}_C(X, X).$$

Für jeden auf C definierten Funktor F ist

$$F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

Ist F additiv, so ist

$$\mathrm{Hom}\,(X, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), F(X)),\ f \mapsto F(f),$$

ein Gruppen-Homomorphismus. Insbesondere gilt dann

$$F(0_X) = 0_{F(X)}.$$

Zusammen ergibt sich

$$1_{F(X)} = F(1_X) = F(0_X) = 0_{F(X)},$$
d.h. F(X) ist ein 0-Objekt.
QED.

1.13 Exake Funktoren von Modul-Kategorien und flache Moduln

Eine exakte Sequenz von A-Moduln und linearen Abbildungen ist eine Folge von A-linearen Abbildungen

$$... \to V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_{i+2} \to ... \qquad (1)$$

mit

$$\mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1} \text{ für alle i.}$$

Falls diese Gleichheit nur für ein gegebenes i gilt, so sagt man die Sequenz ist exakt an der Stelle V_{i+1}. Ein Funktor

$$F: A\text{-Mod} \longrightarrow B\text{-Mod}$$

heißt exakt, wenn er additiv ist und für jede exakte Sequenz (1) von A-Moduln die zugehörige Sequenz

$$... \to F(V_i) \xrightarrow{F(f_i)} F(V_{i+1}) \xrightarrow{F(f_{i+1})} F(V_{i+2}) \to ...$$

von B-Moduln exakt ist. Ein A-Modul U heißt flach, falls der Funktor $U\otimes_A$ exakt ist.

Beispiel 1
Die Sequenz von linearen Abbildungen

$$0 \to V' \xrightarrow{f'} V \xrightarrow{f''} V'' \to 0$$

ist genau dann exakt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.
1. f' ist injektiv (Exaktheit an der Stelle V')
2. Im f' = Ker f'' (Exaktheit an der Stelle V)
3. f'' ist surjektiv (Exaktheit an der Stelle V'').

Man spricht in dieser Situation von einer kurzen exakten Sequenz.

Bemerkung
Sei U ein A-Modul U. Dann ist der Funktor

$$U\otimes_A: A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}, M \mapsto U\otimes_A M,$$

additiv: für beliebige A-Moduln V und W ist die Abbildung

$$\varphi:\mathrm{Hom}_A(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(U\otimes_A V, U\otimes_A W), V \xrightarrow{f} W \mapsto U\otimes_A V \xrightarrow{Id\otimes f} U\otimes_A W,$$

ein Gruppen-Homomorphismus: für u∈U und v ∈V gilt

$$\begin{aligned}\varphi(f'+f'')(u\otimes v) &= (Id\otimes(f'+f''))(u\otimes v)\\ &= Id(u)\otimes(f'+f'')(v)\\ &= Id(u)\otimes(f'(v)+f''(v))\\ &= Id(u)\otimes f'(v)+Id(u)\otimes f''(v)\\ &= \varphi(f')(u\otimes v) + \varphi(f'')(u\otimes v)\\ &= (\varphi(f') + \varphi(f''))(u\otimes v)\end{aligned}$$

Damit gilt $\varphi(f'+f'') = \varphi(f') + \varphi(f'')$, d.h. φ ist ein Gruppen-Homomorphismus.

Beispiel 2
Die Sequenz

$$0 \to V' \xrightarrow{f'} V'\oplus V'' \xrightarrow{f''} V'' \to 0$$

mit $f'(v') = (v', 0)$ und $f''(v', v'') = v''$ ist eine kurze exakte Sequenz:

$$\mathrm{Ker}(f'') = \{(v', 0) \mid v' \in V'\} = \mathrm{Im}(f').$$

Beispiel 3

Für jeden A-Moduln V und jeden A-Teilmodul $U \subseteq V$ ist

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\rho} V/U \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Dabei seien $i: U \hookrightarrow V$ die natürliche Einbettung und $\rho: V \longrightarrow V/U$, $v \mapsto (v \bmod U)$, die natürliche Abbildung auf den Faktorraum.

1.14 Kriterium füx exake Funktoren

Seien A und B kommutative Ringe mit 1 und

$$F: A\text{-Mod} \longrightarrow B\text{-Mod}$$

ein additiver Funktor. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) F ist exakt.

(ii) Für jede kurze exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \to V' \xrightarrow{f'} V \xrightarrow{f''} V'' \to 0$$

ist die zugehörige Sequenz von B-Moduln

$$0 \to F(V') \xrightarrow{f'} F(V) \xrightarrow{f''} F(V'') \to 0$$

exakt.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Weil F kurze exakte Sequenzen in kurze exakte Sequenzen überführt, gilt insbesondere[8]

F(f) injektiv für f injektiv und
F(f) surjektiv für f surjektiv.

Sei eine exakte Sequenz von A-Moduln gegeben:

$$\ldots \to V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_{i+2} \to \ldots \qquad (1)$$

Wir zerlegen f_i und f_{i+1} jeweils in eine Surjektion und eine Injektion:

$$f_i = \alpha_{i+1} \circ \beta_i : V_i \overset{\beta_i}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1}) \overset{\alpha_{i+1}}{\rightarrowtail} V_{i+1}$$

$$f_{i+1} = \alpha_{i+2} \circ \beta_{i+1} : V_{i+1} \overset{\beta_{i+1}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(f_{i+1}) = \mathrm{Ker}(f_{i+2}) \overset{\alpha_{i+2}}{\rightarrowtail} V_{i+2}$$

Es gilt

$\mathrm{Im}(\alpha_{i+1})$	$= \mathrm{Im}(f_i)$	(Surjektivität von β_i)
	$= \mathrm{Ker}(f_{i+1})$	(Exaktheit von (1))

[8] Für jedes injektive $f: V \longrightarrow W$ ist $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \longrightarrow V/\mathrm{Im}(f) \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz.

Für jedes surjektive $f: V \longrightarrow W$ ist $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz.

$$= \mathrm{Ker}(\beta_{i+1}) \qquad \text{(Injektivität von } \alpha_{i+2}\text{)},$$
d.h. es besteht eine exakte Sequenz
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_{i+1}) \xrightarrow{\alpha_{i+1}} V_{i+1} \xrightarrow{\beta_{i+1}} \mathrm{Im}(f_{i+1}) \longrightarrow 0.$$
Nach Vorausetzung ist damit die Sequenz
$$0 \longrightarrow F(\mathrm{Ker}(f_{i+1})) \xrightarrow{F(\alpha_{i+1})} F(V_{i+1}) \xrightarrow{F(\beta_{i+1})} F(\mathrm{Im}(f_{i+1})) \longrightarrow 0 \qquad (2)$$
exakt. Es gilt
$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(F(f_{i+1})) &= \mathrm{Ker}(F(\alpha_{i+2})\circ F(\beta_{i+1})) && \text{(wegen } f_{i+1} = \alpha_{i+2}\circ\beta_{i+1}\text{)}\\
&= \mathrm{Ker}(F(\beta_{i+1})) && \text{(Injektivität von } F(\alpha_{i+2})\text{)}\\
&= \mathrm{Im}(F(\alpha_{i+1})) && \text{(Exaktheit von (2) an der Stelle } F(V_i)\text{)}\\
&= \mathrm{Im}(F(\alpha_{i+1})\circ F(\beta_i)) && \text{(Surjektivitiät von } F(\beta_i)\text{)}\\
&= \mathrm{Im}(F(f_i)) && \text{(wegen } f_i = \alpha_{i+1}\circ\beta_i\text{)}
\end{aligned}$$
Damit ist die Bild-Sequenz exakt an der Stelle $F(V_{i+1})$ (für jedes i).

QED.

Beispiel 1
Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Dann ist der Funktor
$$A\otimes_A : A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod},\ M \mapsto A\otimes_A M,$$
exakt. Für jede kurze exakte Sequenz von A-Moduln
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$
erhält man durch Anwenden von $A\otimes_A$ ein kommutatives Diagramm von A-Moduln
$$\begin{array}{ccccccccc}
0\longrightarrow A\otimes M' & \xrightarrow{id\otimes f} & A\otimes M & \xrightarrow{id\otimes g} & A\otimes M''\longrightarrow 0 & & a\otimes m' \mapsto a\otimes f(m'), a\otimes m & \mapsto & a\otimes g(m)\\
\downarrow\varphi' & & \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi'' & & \downarrow \quad\quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow\\
0\longrightarrow M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M''\longrightarrow 0 & & am' \mapsto f(am'),\ am & \longrightarrow & g(am)
\end{array}$$
Dabei seinen die vertikalen Abbildungen die Isomorphismen $a\otimes m \mapsto am$. Mit der unteren Zeile ist dann auch die obere Zeile exakt.

Beispiel 2
Seien A ein kommuttiver Ring mit 1 und $M = \oplus_{i\in I} A$ ein freier A-Modul. Dann ist der Funktor
$$M\otimes_A : A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod},\ N \mapsto M\otimes_A N,$$
exakt, d.h. freie A-Moduln sind flach.

Beweis. Für jeden A-Modul N ist
$$M\otimes_A N \;=\; (\oplus_{i\in I} A)\otimes_A N \;\overset{9}{=}\; \oplus_{i\in I} A\otimes_A N \;=\; \oplus_{i\in I} N$$
$$\sum_j \{a_{ij}\}_{i\in I}\otimes n_j \mapsto \sum_j \{a_{ij}\otimes n_j\}_{i\in I} \mapsto \sum_j \{a_{ij}n_j\}_{i\in I}$$
eine direkte Summe von Exemplaren von M. Für jede A-lineare Abbildung

[9] Die Funktoren $\otimes$ und $\oplus$ kommutieren (vgl. 1.5 (iv)).

$$f: N \longrightarrow N'$$
ist
$$id \otimes_A f: M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N',\ m \otimes n \mapsto m \otimes f(n)$$
als Abbildung
$$\oplus_{i\in I} N \longrightarrow \oplus_{i\in I} N',$$
von der Gestalt
$$\{n_i\}_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} 1\otimes n_i \mapsto \sum_{i\in I} 1\otimes f(n_i) \mapsto \{f(n_i)\}_{i\in I},$$
d.h. eine direke Summe von Exemplaren von f.[10] Deshalb gilt
$$Ker(id\otimes_A f) = \oplus_{i\in I} Ker(f) \text{ und } Im(id\otimes_A f) = \oplus_{i\in I} Im(f)$$
Für jede exakte Sequenz von A-Moduln
$$\ldots \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \ldots$$
und die zugehörige Sequenz
$$\ldots \longrightarrow M\otimes_A M' \xrightarrow{id\otimes f} M\otimes_A M \xrightarrow{id\otimes g} M\otimes_A M'' \longrightarrow \ldots$$
gilt dann
$$Ker(id\otimes g) = \oplus_{i\in I} Ker(g) = \oplus_{i\in I} Im(f) = Im(id\otimes f),$$
d.h. auch die tensorierte Sequenz ist exakt.
QED.

1.15 Halbexaktheit des Tensorprodukts

Für jede exakte Sequenz von A-Moduln
$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$
und jeden A-Modul N ist die zugehörige Sequenz
$$M'\otimes N \xrightarrow{f\otimes id} M\otimes N \xrightarrow{g\otimes id} M''\otimes N \longrightarrow 0$$
exakt. Man sagt deshalb auch, das Tensorprodukt ist <u>rechtsexakt</u>.

Ist A ein Körper, so ist der Funktor $\otimes_A N$ sogar exakt, d.h. für Körper A ist jeder A-Modul N flach.

Beweis. <u>Exaktheit an der Stelle</u> $M''\otimes N$. Die Aussage folgt aus 1.11 (iv) a): Surjektionen gehen beim Tensorieren in Surjektionen über.

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $M\otimes N$. Für $m'\in M'$ und $n\in N$ gilt
$$\begin{aligned}(g\otimes id)\circ(f\otimes id)(m'\otimes n) &= (g\otimes id)(f(m')\otimes n)\\ &= g(f(m))\otimes n\\ &= 0\otimes n\\ &= 0,\end{aligned}$$
also
$$Im(f\otimes id) \subseteq Ker(g\otimes id).$$
Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen, d.h.
$$Ker(g\otimes id) \subseteq Im(f\otimes id).$$

---
[10] Auf jede Koordinate von $\oplus_{i\in I} N$ wird f angewandt.

Wegen 1.11 b) reicht es zu zeigen, für

$$m \in \mathrm{Ker}(g) \text{ und } n \in N$$

gilt

$$m \otimes n \in \mathrm{Im}(f \otimes id).$$

Nach Voraussetzung gilt Ker(g) = Im(f). Deshalt gibt es ein $m' \in M'$ mit $m = f(m')$, also

$$m \otimes n = f(m') \otimes id(n) = (f \otimes id)(m' \otimes n) \in \mathrm{Im}(f \otimes id).$$

Damit ist die Exaktheit an der Stelle $M \otimes N$ bewiesen.
<u>Die Flachheit von</u> N <u>im Fall eines Körpers</u> A. Ist A ein Körper, so besitzt N über A eine Basis, d.h. N ist ein freier A-Modul. Nach Beispiel 2 von 1.14 sind freie Moduln flach.
QED.

Beispiel 1.

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Dann besteht ein Isomorphismus von A-Moduln

$$M \otimes_A (A/I) \xrightarrow{\cong} M/IM$$

$$m \otimes (a \bmod I) \mapsto am \bmod IM.$$

Insbesondere ist für jedes Ideal I von A der Funktor

$$\text{A-Mod} \longrightarrow \text{A-Mod}, M \mapsto M/IM$$

rechtsexakt.

Beweis. Zeigen wir, M/IM besitzt die Universaltiätseigenschaft von

$$M \otimes_A (A/I)$$

Die Abbildung

$$b: M \times (A/I) \longrightarrow M/IM, (m, a \bmod I) \mapsto am \bmod IM,$$

ist wohldefiniert: für $a' \in A$ mit $a' \bmod I = a \bmod I$ gilt $a' - a \in I$, also

$$a' \cdot m - a \cdot m \in IM,$$

also

$$a' \cdot m \bmod IM = a \cdot m \bmod IM.$$

Wir haben gezeigt, die Abbildung b ist wohldefiniert. Aus der Definition liest man ab, daß b bilinear über A ist. Sei jetzt

$$b': M \times (A/I) \longrightarrow N$$

eine beliebige bilineare Abbildung von A-Moduln. Wir haben zu zeigen, b' faktorisiert sich auf genau eine Weise über b, d.h. b' hat die Gestalt

$$b': M \times (A/I) \xrightarrow{b} M/IM \xrightarrow{\tilde{b}'} N$$

mit einer eindeutig bestimmten A-linearen Abbildung $\tilde{b}'$.

<u>Eindeutigkeit von</u> $\tilde{b}'$. Existiert $\tilde{b}'$, so gilt für jedes $m \in M$

$$\tilde{b}'(m \bmod IM) = \tilde{b}'(b(m, 1 \bmod I) = b'(m, 1 \bmod I),$$

d.h. $\tilde{b}'$ ist durch b eindeutig festgelegt.

<u>Existenz von</u> $\tilde{b}'$. Wir setzen

$$\tilde{b}'(m \bmod IM) := b'(m, 1 \bmod I) \text{ für jedes } m \in M.$$

Diese Definition ist korrekt, denn für jedes $m_0 \in M$ mit

$$m \bmod IM = m_0 \bmod IM$$

gilt

$$m_0 - m \in IM,$$

d.h. es gibt Elemente $a_1, \ldots, a_r \in I$ und $m_1, \ldots, m_r \in M$ mit

$$m_0 - m = \sum_{i=1}^{r} a_i m_i .$$

Also ist

$$\begin{aligned}
b'(m, 1) - b(m_0, 1) &= b'(m-m_0, 1) && \text{(b' ist bilinear)}\\
&= b'\left(\sum_{i=1}^{r} a_i m_i , 1 \bmod I\right) &&\\
&= \sum_{i=1}^{r} a_i b'(m_i , 1 \bmod I) && \text{(b' ist bilinear)}\\
&= \sum_{i=1}^{r} b'(m_i , a_i \bmod I) && \text{(b' ist bilinear)}\\
&= \sum_{i=1}^{r} b'(m_i , 0) && (a_i \in I \text{ für jedes i})\\
&= \sum_{i=1}^{r} b'(m_i , 0\bullet 0) &&\\
&= 0\bullet \sum_{i=1}^{r} b'(m_i , 0) && \text{(b' ist bilinear)}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\tilde{b}'$ korrekt definiert ist. Nach Definition ist $\tilde{b}'$ eine A-lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned}
\tilde{b}'(b(m, a)) &= \tilde{b}'(a\bullet m \bmod IM) && \text{(nach Definition von b)}\\
&= b'(am, 1) && \text{(nach Definition von } \tilde{b}'\text{)}\\
&= a\bullet b'(m, 1) && \text{(b ist A-bilinear)}\\
&= b'(m,a) && \text{(b ist A-bilinear)}
\end{aligned}$$

Dies gilt für beliebige $m \in M$ und $a \in A$. Deshalb ist

$$\tilde{b}'\circ b = b',$$

wie gefordert.

Wir haben gezeigt, wir können M/IM mit dem Tensorprodukt $M\otimes_A A/I$ identifizieren.

Bei dieser Identifikation ist $m\otimes(a \bmod I)$ gerade das Element

$$b(m, a \bmod I) = am \bmod IM.$$

QED.

Beispiel 2

Seien A ein kommuttiver Ring mit 1 und $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge. Dann ist der Funktor

$$S^{-1}A\otimes_A : A\text{-Mod} \longrightarrow S^{-1}A\text{ -Mod}, N \mapsto S^{-1}A\otimes_A N,$$

exakt, d.h. $S^{-1}A$ ist flach über A.

Beweis. 1.<u>Schritt</u>: Definition des Moduls $S^{-1}M$

Für jeden A-Modul N definieren wir den Quotienten-Modul von N bezüglich S als

$$S^{-1}M := \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S\}$$

Dabei werden zwei Quotienten $\frac{m}{s}$ und $\frac{m'}{s'}$ genau dann als gleich angesehen, wenn es ein $t \in S$ gibt mit

$$t\cdot(s'\cdot m - s\cdot m') = 0. \qquad (1)$$

Durch (1) ist eine Äquivalenz-Relation von Paaren (m, s) und (m',s') aus $M\times S$ definiert und die $\frac{m}{s}$ sind gerade die Äquivalenz-Klassen bezüglich dieser Relation. Die Menge $S^{-1}M$ ist ein $S^{-1}A$-Modul bezüglich der Operationen

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm}{ss'}$$

$$\frac{a}{s}\cdot\frac{m'}{s'} = \frac{am'}{ss'}$$

(im Fall M = A sind so Addition und Multiplikation im Ring $S^{-1}A$ definiert).

2.<u>Schritt</u>: $S^{-1}A\otimes_A M \cong S^{-1}M$ als $S^{-1}A$-Moduln.

Die Abbildung

$$S^{-1}A \times M \longrightarrow S^{-1}M, (\frac{a}{s}, m) \mapsto \frac{am}{s}$$

ist wohldefiniert: für $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ gibt es ein $t\in S$ mit $t\cdot(s'a - sa') = 0$ in A, also

$$t\cdot(s'am - sa'm) = 0 \text{ in } M.$$

Deshalb gilt $\frac{am}{s} = \frac{a'm}{s'}$. Die Abbildung ist tatsächlich wohldefiniert.

Sie ist nach Konstruktion bilinear über A. Deshalb existiert eine A-lineare Abbildung

$$\varphi: S^{-1}A\otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M, \frac{a}{s}\otimes m \mapsto \frac{am}{s}.$$

Wir haben zu zeigen, diese Abbildung ist bijektiv. Wir zeigen dies durch die Konstruktin der Umkehrabbildung. Sei ψ die Abbildung

$$\psi: S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}A\otimes_A M, \frac{m}{s} \mapsto \frac{1}{s}\otimes m.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert: für $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$ gibt es ein $t\in S$ mit

$$t\cdot(s'\cdot m - s\cdot m') = 0 \text{ in } M,$$

d.h.

$$t\cdot s'\cdot m = t\cdot s\cdot m'.$$

Deshalb gilt in $S^{-1}A\otimes_A M$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\otimes m &= \frac{ts'}{tss'}\otimes m \\
&= \frac{1}{tss'}\otimes ts'm \\
&= \frac{1}{tss'}\otimes t\cdot s\cdot m' &&\text{(wegen } t\cdot s'\cdot m = t\cdot s\cdot m'\text{)} \\
&= \frac{ts}{tss'}\otimes m' \\
&= \frac{1}{s'}\otimes m'.
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, Abbildung ψ ist tatsächlich wohldefiniert.

Weiter gilt

$$\psi(\varphi(\frac{a}{s}\otimes m)) = \psi(\frac{am}{s}) = \frac{1}{s}\otimes am = \frac{a}{s}\otimes m$$

also

$$\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}.$$

Außerdem ist

$$\varphi(\psi(\frac{m}{s})) = \varphi(\frac{1}{s}\otimes m) = \frac{1\bullet m}{s} = \frac{m}{s} \ .$$

Die beiden Abbildungen sind also invers zueinander. Aus den Abbildungsvorschriften liest man direkt ab, daß sie $S^{-1}A$-linear sind.

3.<u>Schritt</u>. $S^{-1}A\otimes_A$ ist exakt.

Es reicht zu zeigen, für jeden A-Modul M und jeden Teilmodul $N \subseteq M$ ist die Abbildung

$$S^{-1}A\otimes_A N \longrightarrow S^{-1}A\otimes_A M, \frac{a}{s}\otimes n \mapsto \frac{a}{s}\otimes n,$$

injektiv. Auf Grund des zweiten Schritts reicht es zu zeigen, die Abbildung

$$S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}M, \frac{n}{s} \mapsto \frac{n}{s},$$

ist injektiv. Sei also $\frac{n}{s} = \frac{0}{s}$ in $S^{-1}M$. Dann gibt es ein $t\in S$ mit

$$t\bullet(s\bullet n - s\bullet 0) = 0 \text{ in } M.$$

Wegen $n\in N$ besteht dieselbe Relation aber auch im kleineren N, d.h. es gilt $\frac{n}{s} = \frac{0}{s}$ in $S^{-1}N$.

QED.

Beispiel 3.

Seien $f: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1, M ein flacher A-Modul und

$$I \subseteq B \text{ und } J \subseteq B$$

zwei Ideale von B. Wegen der Flachheit von M über A induzieren die natürlichen Inklusionen

$$I \hookrightarrow B \text{ und } J \hookrightarrow B$$

injektive A-lineare Abbildungen

$$I\otimes_A M \rightarrowtail B\otimes_A M \text{ und } J\otimes_A M \rightarrowtail B\otimes_A M$$

Wir können also $I\otimes M$ und $J\otimes M$ als Teilmoduln von $B\otimes M$ ansehen. Es gilt dann

$$I\otimes M \cap J\otimes M = (I\cap J)\otimes M.$$

Beweis. Die Abbildung $B \longrightarrow B/I \oplus B/J$, $b \mapsto (b \bmod I, b \bmod J)$ ist A-linear und hat den Kern $I\cap J$, induziert also eine injektive A-lineare Abbilidung

$$B/(I\cap J) \rightarrowtail B/I \oplus B/J, b \bmod I\cap J \mapsto (b \bmod I, b \bmod J).$$

Weil B flach ist über A erhalten wir durch Anwenden des Funktors $\otimes_A B$ eine injektive Abbildung

$$(B/I\cap J)\otimes M \rightarrowtail (B/I)\otimes M \oplus (B/J)\otimes M, \tag{1}$$

$$b \bmod I\cap J \otimes m \mapsto (b \bmod I \otimes m, b \bmod J \otimes m).$$

Außerdem erhalten wir aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow B/I \longrightarrow 0$$

die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow I\otimes M \longrightarrow B\otimes M \longrightarrow (B/I)\otimes M \longrightarrow 0,$$

also

$$(B/I)\otimes M =[11] B\otimes M / I\otimes M,$$

und analog mit J und $I\cap J$ anstelle von I ergibt sich

$$(B/J)\otimes M = B\otimes M / J\otimes M.$$

$$(B/I\cap J)\otimes M = B\otimes M / (I\cap J)\otimes M.$$

Die Injektion (1) bekommt so die Gestalt

$$B\otimes M / (I\cap J)\otimes M \rightarrowtail (B\otimes M/I\otimes M) \oplus (B\otimes M/J\otimes M)$$

$$b\otimes m \bmod (I\cap J)\otimes M \mapsto (b\otimes m \bmod I\otimes M,\ b\otimes M \bmod J\otimes M)$$

Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} B\otimes M \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ B\otimes M/(I\cap J)\otimes M \arrow[r, hook, "\gamma"] & (B\otimes M/I\otimes M)\cap(B\otimes M/J\otimes M) \end{tikzcd}$$

Dabei seien α die natürliche Abbildung auf den Faktor-Modul

$$\alpha(x) = x \bmod (I\cap J)\otimes M,$$

β die A-lineare Abbildung

$$\beta(x) \quad = (x \bmod I\otimes M,\ x \bmod J\otimes M)$$

und γ die eben konstruierte injektive A-lineare Abbildung mit

$$\gamma(x \bmod (I\cap J)\otimes M) = (x \bmod I\otimes M,\ x \bmod J\otimes M).$$

Weil γ injektiv ist, gilt

$$\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Ker}(\gamma\circ\alpha) = \mathrm{Ker}(\alpha) = (I\cap J)\otimes M.$$

Aus der Definition von β lesen wir ab,

$$\mathrm{Ker}(\beta) = I\otimes M \cap I\otimes M.$$

Zusammen folgt

$$(I\cap J)\otimes M = I\otimes M \cap J\otimes M.$$

QED.

2 Die Tensor-Algebra und einige Anwendungen

2.1 Definition

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M und N zwei A-Moduln und n eine nicht-negative ganze Zahl. Eine Abbildung

$$f\colon M\times\ldots\times M \longrightarrow N,\ (x_1,\ldots, x_n) \mapsto f(x_1,\ldots, x_n)$$

heißt n-linear über A, wenn sie in Bezug auf jedes ihrer Argumente x_i linear über A ist.

Eine 1-lineare Abbildung ist dabei einfach eine lineare Abbildung

$$M \longrightarrow N.$$

Eine 2-lineare Abbildung ist dasselbe wie eine bilineare Abbildung

$$M \times M \longrightarrow N.$$

Unter einer 0-linearen Abbildung wollen wir eine lineare Abbildung

---

[11] Dies gilt auch ohne die Annahme, da M flach ist über A, wenn $J\otimes M$ das Bild von $J\otimes M$ in $B\otimes M$ bezeichnet.

$$A \longrightarrow N$$

verstehen.

2.2 Die Tensor-Algebra eines A-Moduls

Wir erinnern zunächst an den Begriff der Algebra über einem kommutativen Ring mit 1. Seien A ein kommutativer Ring mit 1. Eine A-Algebra ist ein Ring B mit 1 zusammen mit einem Homomorphismus

$$A \to B$$

von Ringen mit 1, dessen Bild mit Zentrum von B liegt. Der Homomorphismus heißt dann Struktur-Homomorphismus von B. Seien B und B' zwei A-Algebren. Ein Homomorphismus von A-Algebren

$$f: B \to B'$$

ist ein Homomorphismus f von Ringen mit 1, für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] & & B' \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dabei sollen die schrägen Pfeile gerade die Struktur-Homomorphismen bezeichnen.

Seien jetzt A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Die Tensor-Algebra von M über A ist definiert als die direkte Summe

$$T_A(M) := T(M) := \oplus_{n=0}^{\infty} T(M)_n \text{ mit } T(M)_n := M^{\otimes n}$$

Dabei seien

$M^{\otimes 0} = A$,

$M^{\otimes 1} = M$

$V^{\otimes n} := M \otimes \ldots \otimes M$ (n-mal)

die n-te Tensorpotenz von M, d.h. das Tensorprodukt über A von n Exemplaren des A-Moduls M.

Nach Konstruktion ist $T_A(M)$ ein A-Modul. Der direkte Summand

$$T(M)_n = M^{\otimes n} \subseteq T(M)$$

heißt homogener Bestandteil des Grades n von T(M), dessen Elemente t heißen homogene Elemente des Grades n und man schreibt

$$\deg t = n.$$

Seien

$$t' = \sum_{n=1}^{\infty} t'_n \text{ und } t'' = \sum_{n=1}^{\infty} t''_n$$

zwei Elemente von T(M) mit t'_n und t''_n homogen vom Grad n. Wir definieren das Produkt von t' und t'' wie folgt

$$t' \cdot t'' = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t'_m \otimes t''_n$$

Dabei wird

$$t'_m \otimes t''_n \in M^{\otimes m} \otimes M^{\otimes n} \cong M^{\otimes(m+n)}$$

als Element von $M^{\otimes(m+n)}$ aufgefaßt. Speziel für n = 0 haben wir

$$t'_m \otimes t''_0 \in M^{\otimes m} \otimes K \cong M^{\otimes m}\ ,\ x \otimes y \mapsto yx,$$

d.h. $t'_m \otimes t''_0$ wird mit $t''_0 \cdot t'_m$ identifiziert. Analog wird für m = 0 das Element

$$t'_0 \otimes t''_n$$

mit $t'_0 \cdot t''_n$ identifiziert. Die Multiplikation von zwei Elementen 0-ten Grades entspricht damit der gewöhnlichen Multiplikation mit Elementen aus A.

Die Abbildung

$$M \to T(M),\ c \mapsto c,$$

wobei das Bild c als homogenes Element des Grades 0 von T(M) aufgefaßt wird, heißt <u>natürliche Einbettung</u> von A in die Tensoralgebra T(M).

Die Abbildung

$$M \to T(M),\ m \mapsto m,$$

wobei das Bild m als homogenes Element des Grades 1 von T(M) aufgefaßt wird, heißt <u>natürliche Einbettung</u> von M in die Tensoralgebra T(M).

Bemerkungen

(i) Mit der oben definierten Multiplikation ist T(M) eine A-Algebra.

(ii) Die natürliche Einbettung $A \to T(M)$ ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1.

(iii) Die natürliche Einbettung $M \to T(M)$ ist A-linear.

Beispiel

Seien K ein Körper und V = Kv ein eindimensionaler K-Vektorraum. Dann ist

$$K^{\otimes n} = Kv \otimes ... \otimes v = Kv^{\otimes n}$$

für jedes n, also

$$T(V) = K \oplus Kv \oplus Kv^{\otimes 2} \oplus ...$$

Wenn wir die Multiplikation in T(V) nicht mehr mit dem Tensorzeichen "⊗" sondern mit "•" bezeichnen, erhalten wir

$$T(V) = K \oplus K \bullet v \oplus K \bullet v^2 \oplus ... = K[v],$$

d.h. T(V) ist bis auf Isomorphie gerade die K-Algebra der Polynome in der Unbestimmten v mit Koeffizienten aus K.

Beispiel

Seieine K ein Körper und V = Kv + Kw ein zweidimensionaler K-Vektorraum. Dann ist

$$V^{\otimes 1} = V = Kv + Kw$$

$$V^{\otimes 2} = Kv^2 + Kw^2 + Kvw + Kwv$$

$$...$$

und die Tensoralgebra

$$T(V) = K\langle v, w\rangle$$

läßt sich mit der K-Algbra der nicht-kommutativen Polynome in v und w mit Koeffizienten aus K identifizieren.

Analog erhält man für jeden n-dimensionalen K-Vektorraum

$$V = Kv_1 + ... + Kv_n$$

eine Identifikation

$$T(V) = K\langle v_1 , \dots , v_n\rangle$$
der Tensor-Algebra mit der K-Algebra der nicht-kommutativen Polynome in $v_1, \dots ,v_n$ mit Koeffizienten aus K.

2.3 Die Universalitätseigenschaft der Tensorpotenz $M^{\otimes n}$

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Dann ist die Abbildung
$$\rho_n: M^n = M\times\ldots\times M \to M^{\otimes n} , (m_1,\ldots,m_n) \mapsto m_1\otimes\ldots\otimes m_n$$
des direkten Produkts von n Exemplaren von M in die Tensorpotenz $M^{\otimes n}$ eine n-lineare Abbildung über A.

Jede n-lineare Abbildung
$$\varphi:M\times\ldots\times M \to N$$
mit Werten in einem A-Modul N faktorisiert sich auf genau eine Weise über ρ_n,
$$\varphi: M\times\ldots\times M \xrightarrow{\rho_n} M^{\otimes n} \xrightarrow{\tilde\varphi} N,$$
d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde\varphi$ mit $\varphi = \tilde\varphi\circ\rho_n$.

Beweis. Eindeutigkeit von $\tilde\varphi$. Falls $\tilde\varphi$ existiert, so gilt für beliebige $x_1,\ldots,x_n\in M$:
$$\tilde\varphi (x_1\otimes\ldots\otimes x_n) = \tilde\varphi (\rho_n(x_1,\ldots,x_n)) = \varphi(x_1,\ldots,x_n).$$
Die Werte von $\tilde\varphi$ auf den Elementen der Gestalt $x_1\otimes\ldots\otimes x_n$ sind also eindeutig festgelegt. Da diese Elemente ein Erzeugendensystem von $M^{\otimes n}$ bilden und da $\tilde\varphi$ linear sein soll, ist somit die gesamte Abbildung $\tilde\varphi$ festgelegt.

Existenz von $\tilde\varphi$. Beweis durch Induktion nach n.

Im Fall n = 0 ist ρ_0: $A \longrightarrow A$ nach Vereinbarung die identische Abbildung von A und die Behauptung ist trivial (jede Abbildung $A \longrightarrow N$ faktorisiert sich eindeutig über die identische Abbildung $A \longrightarrow A$).

Im Fall n = 1 ist $\rho_1: M \longrightarrow M$ die identische Abbildung und φ eine lineare Abbildunge
$$\varphi: M = M^{\otimes 1} \to N$$
Auch in diesem Fall faktorisiert sich φ eindeutig
$$\varphi: M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{\tilde\varphi} N$$
über die identische Abbildung (mit $\tilde\varphi$ = m).

Sei jetzt n > 1. Für jedes feste $x_0\in M$ ist die folgende Abbildung (n-1)-linear über A.

$$\varphi_{x_0}: M^{n-1} \to N, (x_1,...,x_{n-1}) \mapsto \varphi(x_1,...,x_{n-1}, x_0),$$

Nach Induktionsvoraussetzung faktorisiert sie sich eindeutig über ρ_{n-1},

$$\varphi_{x_0}: M^{n-1} \xrightarrow{\rho_{n-1}} M^{\otimes(n-1)} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{x_0}} N,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}_{x_0}$ mit $\varphi_{x_0} = \tilde{\varphi}_{x_0} \circ \rho_{n-1}$, d.h. mit

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{x_0}(x_1\otimes...\otimes x_{n-1}) &= \tilde{\varphi}_{x_0}(\rho_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})) = m_{x_0}(x_1,...,x_{n-1}) \\ &= m(x_1,...,x_{n-1},x_0).\end{aligned}$$

Die lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi}_{x_0}: M^{\otimes(n-1)} \longrightarrow N,\ x_1\otimes...\otimes x_{n-1} \mapsto \varphi(x_1,...,x_{n-1},v_0),$$

ist durch die Bedingung

$$\tilde{\varphi}_{x_0}(x_1\otimes...\otimes x_{n-1}) = \varphi(x_1,...,x_{n-1},x_0) \tag{1}$$

eindeutig festgelegt (da die $x_1\otimes...\otimes x_{n-1}$ ein Erzeugendensystem von $M^{\otimes(n-1)}$ bilden). Betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{\varphi}':M^{\otimes(n-1)}\times M \to N,\ (t, x) \mapsto \tilde{\varphi}_x(t). \tag{2}$$

Nach Konstruktion ist sie linear im ersten Argument t. Zeigen wir, sie ist auch linear im zweiten Argument x, d.h. , zeigen wir, es gilt

$$\tilde{\varphi}_{c'x'+c''x''}(t) = c'\tilde{\varphi}_{x'}(t) + c''\,\tilde{\varphi}_{x''}(t)$$

für alle $x',x''\in M$, alle $c',c''\in A$ und alle $t\in M^{\otimes(n-1)}$, d.h.

$$\tilde{\varphi}_{c'x'+c''x''} = c'\tilde{\varphi}_{x'} + c''\,\tilde{\varphi}_{x''}.$$

Auf beiden Seiten stehen lineare Abbildungen. Zum Beweis ihrer Gleichheit reicht es zu zeigen, sie haben dieselben Werte in allen Vektoren eines Erzeugendensystems von $M^{\otimes(n-1)}$. Es reicht also zu zeigen,

$$\tilde{\varphi}_{c'x'+c''x''}(x_1\otimes...\otimes x_{n-1}) = c'\tilde{\varphi}_{x'}(x_1\otimes...\otimes x_{n-1}) + c''\,\tilde{\varphi}_{x''}(x_1\otimes...\otimes x_{n-1})$$

für beliebige $x_1,...,x_{n-1}\in M$. Wegen (1) gilt

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \varphi(x_1,...,x_{n-1}, c'x'+c''x'') \\ &= c'\varphi(x_1,...,x_{n-1},x') + c''\varphi(x_1,...,x_{n-1},x'') \\ &= \text{RHS}\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, die Abbildung (2) ist bilinear. Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts faktorisiert sie sich eindeutig über die natürliche Abbildung ins Tensorprodukt $\rho:M^{\otimes(n-1)}\times M \to M^{\otimes(n-1)}\otimes M = M^{\otimes n}$,

$$\tilde{\varphi}': M^{\otimes(n-1)}\times M \xrightarrow{\rho} M^{\otimes n} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} N,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi}\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{\varphi}'(t,x) = \tilde{\varphi}(t\otimes v) = \tilde{\varphi}_x(t)$$

für alle $t\in M^{\otimes(n-1)}$ und alle $x\in M$. Speziell für $t = x_1\otimes...\otimes x_{n-1}$ erhalten wir

$$\tilde{\varphi}\,(x_1\otimes...\otimes x_{n-1}\otimes x) = \tilde{\varphi}_x(x_1\otimes...\otimes x_{n-1}) = \varphi(x_1,...,x_{n-1},x).$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$\varphi = \tilde{\varphi}\circ\rho_n\ ,$$

d.h. $\tilde{\varphi}$ ist gerade die Abbildung, deren Existenz wir beweisen wollen.
QED.
Bemerkung
Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M und zwei A-Moduln. Bezeichne

$$L_A(M, N)_n$$

den A-Modul der n-linearen Abbildungen $M\times...\times M \longrightarrow N$ über A. Die gerade bewiesene Universalitätseigenschaft von $M^{\otimes n}$ besagt, daß die A-lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A(M^{\otimes n}, N) \longrightarrow L_A(M, N)_n,\ \tilde{\varphi} \mapsto \tilde{\varphi}\circ\rho_n,$$

bijektiv, also ein Isomorphismus ist.
Ist A = K ein Körper, so hat insbesondere hat der Modul der n-linearen Abbildungen auf M mit Werten in N die Dimension

$$\begin{aligned}\dim_K L_K\,(M, N)_n &= \dim_K \mathrm{Hom}_K(M^{\otimes n}, N)\\ &= \dim_K M^{\otimes n}\bullet\dim_K N\\ &= (\dim_K M)^n\bullet\dim_K N.\end{aligned}$$

2.4 Die Universalitätseigenschaft der Tensor-Algebra

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Dann gibt es für jede A-Algebra S und jede A-lineare Abbildung

$$f:M \to S$$

genau einen Homomorphismus

$$\tilde{f}:T_A(M) \to S$$

von A-Algebren derart, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f"'] & T(M) \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

dabei sei ρ die natürliche Einbettung von M in die Tensor-Algebra T(M).

Beweis. <u>Eindeutigkeit von $\tilde{f}$</u>. Wir nehmen an, $\tilde{f}$ existiert und leiten eine Formel für $\tilde{f}$ her, aus der hervorgeht, daß $\tilde{f}$ eindeutig festgelegt ist. Sei

$$t \in T(M).$$

Dann ist t eine Summe von endlich vielen homogenen Elementen. Ein homogenes Element des Grades n (aus $M^{\otimes n}$) wiederum ist eine Summe aus endlich vielen Elementen der Gestalt $x_1\otimes...\otimes x_n$ mit $x_i \in M$. Mit anderen Worten, t hat die Gestalt

$$t = \sum_{i=1}^{s} x^i_1\otimes...\otimes x^i_{n_i} \text{ mit } x^i_j \in M.$$

Damit gilt, da $\tilde{f}$ eine A-lineare Abbildung ist, die Produkte in Produkte überführt,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}(x^i_1\otimes...\otimes x^i_{n_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}(x^i_1)\bullet...\bullet\tilde{f}(x^i_{n_i}) && (x^i_j \text{ P } T(M)_1) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}(\rho(x^i_1))\bullet...\bullet\tilde{f}(\rho(v^i_{n_i})) && (x^i_j \text{ P } M) \\
&= \sum_{i=1}^{s} f(v^i_1)\bullet...\bullet f(v^i_{n_i}) && \text{(Kommutativität des Diagramms)}
\end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{f}$ eindeutig durch f festgelegt.

Existenz von $\underline{\tilde{f}}$. Betrachten wir die Abbildung

$$f_n{:}M\times...\times M \to S,\ (x_1,...,x_n) \mapsto f(x_1)\bullet...\bullet f(x_n).$$

Auf Grund des Distributivgesetzes für den Ring S ist diese linear in jedem der n Argumente. Nach 2.3 faktorisiert sich diese Abbildung eindeutig über die natürliche Abbildung $\rho{:}M^n \longrightarrow M^{\otimes n}$,

$$f_n{:}\ M^n \xrightarrow{\rho} M^{\otimes n} \xrightarrow{\tilde{f}_n} S,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\underline{\tilde{f}}_{\underline{n}}$ mit $f_n = \underline{\tilde{f}}_{\underline{n}}\circ\rho$, d.h. mit

$$\underline{\tilde{f}}_{\underline{n}}(x_1\otimes...\otimes x_n) = \underline{\tilde{f}}_{\underline{n}}(\rho(x_1,...,x_n)) = f_n(x_1,...,x_n) = f(x_1)\cdot...\cdot f(x_n)$$

für alle $x_1,...,x_n \in M$. Wir definieren $\underline{\tilde{f}}$: T(V) → R, indem wir setzen

$$\underline{\tilde{f}}(t) = \tilde{f}_0(t_0) + \tilde{f}_1(t_1) + ... + \tilde{f}_s(t_s)$$

falls $t = t_0 + t_1 + ... + t_s$ gilt mit t_i homogen vom Grad i. Dabei sei

$$\tilde{f}_0(t_0) = t_0\cdot 1_S$$

Die Abbildung ist wohldefiniert und linear. Für homogene Elemente $x \in M$ des Grades 1 gilt

$$\underline{\tilde{f}}(\rho(x)) = \underline{\tilde{f}}_1(x) = f(x).$$

Auf Grund der Defintion von $\tilde{f}_0$ gilt $\tilde{f}(1_{\underline{A}}) = 1_S$. Durch direktes Nachrechnent sieht man, daß $\tilde{f}$ ein Ringhomomorphismus ist.

QED.

2.5 Eigenschaften der Tensoralgebra

(i) Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und B eine A-Algebra. Ein Erzeugendensystem von B über A ist eine Famlie

$$\{b_i\}_{i\in I}$$

von Elementen aus B mit der Eigenschaft, daß jede A-Teilalgebra

$$B' \subseteq B,$$

welche alle b_i enthält, gleich B sein muß,

$$B' = B.$$

Beispiel 1.

Für jede A-Algebra B bildet die Familie der Elemente von B ein Erzeugendensystem.

Beispiel 2.
Ist

$$B = A[x_1, \dots , x_n]$$

die A-Algebra der Polynome in den Unbestimmten $x_1, \dots , x_n$ mit Koeffizienten aus A, so bilden die Unbestimmten $x_1, \dots , x_n$ ein Erzeugendensystem von B über A.

(ii) Seien B eine A-Algebra und $M \subseteq B$ ein A-Modul, welcher ein Erzeugendensystem von B als A-Algebra enthält. Das Bild der Fortsetzung der natürlichen Einbettung

$$i: M \hookrightarrow B$$

zu einem A-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{i}: T(M) \longrightarrow B$$

ist dann eine A-Teilalgebra, die ebenfalls dieses Erzeugendensystem enthält. Diese Teilalgebra ist deshalb gleich B, d.h. der A-Algebra-Homomorphismus $\tilde{i}$ ist surjektiv. Es folgt

$$B \cong S(V)/\mathrm{Ker}(\tilde{i}).$$

Mit anderen Worten, jede A-Algebra ist ein Faktor einer Tensor-Algebra über A.

(iii) Sei

$$\mathbf{Mod}$$

die Kategorie der Paare (A, M), deren erste Koordinate A ein kommutativer Ring mit 1 ist und deren zweite ein A-Mod. Die Morphismen

$$(A, M) \longrightarrow (B, N)$$

von **Mod** seien Paare (f, h), deren erste Koordinate f ein Homomorphismus

$$f.\ A \longrightarrow B$$

von Ringen mit 1 ist und deren zweite ein Homomorphismus

$$h: M \longrightarrow N$$

der additiven Gruppen von M und N ist mit

$$h(a\bullet m) = f(a)\bullet h(m)$$

für jedes $a \in A$ und jedes $m \in M$.

(iv) Ist $(f,h): (A,M) \longrightarrow (B,N)$ ein Morphismus der Kategorie **Mod** so kann man die die Zusammensetzung

$$M \xrightarrow{h} N \overset{i_N}{\hookrightarrow} T_B(N)$$

von h mit der natürlichen Einbettung von N in die Tensor-Algebra als Homomorphismus von A-Moduln mit Werten in der A-Algebra $T_B(N)$ auffassen.

Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Tensor-Algebren, gibt es genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$T(f,h): T_A(M) \longrightarrow T_B(N),$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_A(M) & \xrightarrow{T(f,h)} & T_B(N) \\ i_A \uparrow & & i_B \uparrow \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

kommutativ ist. Auf diese Weise wird der Übergang zur Tensor-Algebra zu einem Funktor

$$T: \mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Rings}, (A,M) \mapsto T_A(M), (f,h) \mapsto T(f,h),$$

der Kategorie **Mod** der Moduln mit Werten in der Kategorie der (nicht notwendig kommutativen) Ringe mit 1.

(v) Seien $f: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1 und M ein A-Modul. Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$T_A(M)\otimes_A B \xrightarrow{\cong} T_B(M\otimes_A B)$$

denn für natürliche i und nicht-negative ganze j gilt

$$\begin{aligned} M^{\otimes i}\otimes_A(B\otimes_A M)^{\otimes j} &\cong M^{\otimes(i-1)}\otimes_A M\otimes_A(B\otimes_A M)^{\otimes j} \\ &\cong^{12} M^{\otimes(i-1)}\otimes_A(M\otimes_A B)\otimes_B(B\otimes_A M)^{\otimes j} \\ &\cong M^{\otimes(i-1)}\otimes_A (B\otimes_A M)^{\otimes(j+1)}. \end{aligned}$$

Wiederholtes Anwenden liefertt

$$M^{\otimes n}\otimes_A B \cong (M\otimes_A B)^{\otimes n} \text{ für jedes n.}$$

Bemerkung

Nachfolgend wollen wir die Beschreibung von A-Algebren als Faktoren einer Tensor-Algebra an einigen Beispielen illustrieren. Dazu benötigen wir den Begriff des Ideals.

2.6 Das von einer Menge erzeugte Ideal

Seien A ein kommutativer Ring mit1 und B eine A-Algebra. Ein <u>Ideal</u> von B ist ein A-Teilmodul

$$I \subseteq B$$

mit der Eigenschaft, daß für beliebige $x \in I$ und $b \in B$ die beiden Produkte

$$b\cdot x \in I \text{ und } x\cdot b \in I$$

von b und x in I liegen.

---

[12] $(B\otimes_A M)^{\otimes j}$ ist ein B-Modul.

Beispiel

Für jede Teilmenge $S \subseteq B$ ist der A-Teilmodul von S, welcher von den Elementen der Gestalt

$$b \bullet s \bullet b' \text{ mit } b,b' \in B \text{ und } s \in S$$

erzeugt wird, ein Ideal von B (wegen des Assoziativegesetzes der Multiplikation). Dieses Ideal heißt das von M erzeugte Ideal von B und wird mit

$$I(S) := I_B(S)$$

bezeichnet.

2.7 Der Faktorraum nach einem Ideal

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, B eine A-Algbra und $I \subseteq B$ ein Ideal. Dann ist durch

$$(x + I) \cdot (y + I) = xy + I$$

ein Produkt auf B/I definert und der A-Modul B/I ist mit diesem Produkt eine A-Algebra. Die natürliche Abbildung

$$\rho : B \to B/I$$

ist ein Homomorphismus von A-Algebren.

Beweis. Seien $x + I = x' + I$ und $y + I = y' + I$. Wir haben zu zeigen, es gilt

$$xy + I = x'y' + I.$$

Es gilt

$x-x' \in I$ und $y-y' \in I$

also

$(x-x')y \in I$ und $x'(y-y') \in I$

also

$xy - x'y' \in I$

also

$xy + I = x'x' + I.$

Nach Konstruktion ist

$$\rho(xy) = xy + I = (x+I)(y+I) = \rho(x)\rho(y).$$

Daraus ergibt sich, daß B/I ein Ring ist und ρ ein Ringhomomorphismus. Bezeichnet 1 das Einselement von B, so spielt $\rho(1)$ die Rolle des Einselements von B/I. Durch die Zusammensetzung der Ringhomomorphismen

$$A \to B \to B/I$$

bekommt B/I die Struktur einer A-Algebra.

QED.

2.8 Die symmetrische Algebra

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und

$$I'(M) \subseteq T(M)$$

das von den Elementen der Gestalt

$$x \otimes y - y \otimes x \text{ mit } x,y \in M$$

erzeugte Ideal. Dann heißt

$$S(M) = S_A(M) = T(M)/I'(M)$$

<u>symmetrische Algebra</u> von M über A. Die Zusammensetzung

$$M \to T(M) \xrightarrow{\rho} S(M)$$

der natürlichen Einbettung (im Grad 1) mit der natürliche Abbildung auf den Faktorring heißt wieder natürliche Einbettung (im Grad 1). Analog definiert man die natürliche Einbettung

$$A \longrightarrow T(M) \xrightarrow{\rho} S(M)$$

im Grad 0.

Bemerkung

Die natürlichen Einbettungen sind injektiv, weil I'(V) = Ker(ρ) aus Summen von homogenen Elementen eines Grades ≥ 2 besteht. Sie gestatten es somit M und A mit Teilmengen von S(M) zu identifizieren.

2.9 Die Universalitätseigenschaft der symmetrischen Algebra

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul, B eine kommutative A-Algebra und

$$f: M \to B$$

eine A-lineare Abbildung. Dann gibt es genau eine Fortsetzung

$$\tilde{f}: S(M) \to B$$

von f zu einen Homomorphismus von A-Algebren, d.h. es gibt genau einen A-Algebra-Homomorphismus von $\tilde{f}$: S(M) → B, dessen Zusammensetzung mit der der natürlichen Einbettung

$$\bar{\rho}: M \xrightarrow{i} T(M) \xrightarrow{\rho} T(M)/I'(M) = S(M)$$

gleich f ist.

Beweis. Existenz von $\tilde{f}$.Auf Grund der Universalitätseigenschatt der Tensor-Algebra gibt es genau eine Fortsetzung

$$f': T(M) \to B$$

von f zu einen Homomorphismus von A-Algebren, d.h. die Zusammensetzung von f' mit der natürlichen Abbildung

$$i: M \longrightarrow T(M)$$

ist gleich

$$f' \circ i = f.$$

Für beliebige Vektoren x',x"∈M und beliebige Tensoren t',t"∈T(M) gilt

$$f'(t'(x'\otimes x'' - x''\otimes x')t'') = f'(t')(f'(x')f'(x'') - f'(x'')f'(x'))f'(t'') = 0,$$

da S kommutativ ist. Mit anderen Worten, ein Erzeugendensystem des definierenden Ideals I'(M) liegt im Kern von f', d.h.

$$I'(M) \subseteq Ker(f').$$

Auf Grund des Homomorphie-Satzes faktorisiert sich f' auf genau eine Weise über die natürliche Abbildung $\rho: T(M) \longrightarrow S(M) = T(M)/I'(M)$ auf den Faktorraum,

$$f': T(M) \xrightarrow{\rho} S(M) \xrightarrow{\tilde{f}} B,$$

d.h. es gibt genau einen A-Algebra-Homomorphismus $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{f}(t + I'(V)) = \tilde{f}(\rho(t)) = f'(t).$$

Insbesonder gilt

$$\tilde{f}(\bar{\rho}(x)) = \tilde{f}(\rho(i(x))) = f'(i(x)) = f(x)$$

für jedes x ∈ M, d.h. $\tilde{f}$ setzt die Abbildung f fort.

Eindeutigkeit von $\tilde{f}$.

Angenommen, es existiert ein weiterer A-Algebra-Homomorphismus $\tilde{f}':S(M)\longrightarrow B$ mit

$$\tilde{f}'\circ\bar{\rho} = f.$$

Dann gilt

$$f = \tilde{f}'\circ\bar{\rho} = \tilde{f}'\circ\rho\circ i.$$

Dann sind $\tilde{f}'\circ\rho: T(M) \longrightarrow B$ und $\tilde{f}\circ\rho: T(M) \longrightarrow B$ Fortsetzungen von $f:M \longrightarrow B$ zu A-Algebra-Homomorphismen auf T(M). Auf Grund der Universalitäteignschaft von T(M) muß $\tilde{f}'\circ\rho = \tilde{f}\circ\rho$ gelten. Weil ρ surjektiv ist, folgt $\tilde{f}' = \tilde{f}$, d.h. $\tilde{f}$ ist eindeutig bestimmt.
QED.

2.10 Eigenschaften der symmetrischen Algebra

(i) Seien A ein kommutativer Ring mit 1, B eine kommutative A-Algebra und $M \subseteq B$ ein A-Modul, welcher ein Erzeugendensystem von B als A-Algebra enthält. Das Bild der Fortsetzung der natürlichen Einbettung

$$i: M \hookrightarrow B$$

zu einem A-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{i}:S(M) \longrightarrow B$$

ist dann eine A-Teilalgebra, die ebenfalls dieses Erzeugendensystem enthält. Diese Teilalgebra ist deshalb gleich B, d.h. der A-Algebra-Homomorphismus $\tilde{i}$ ist surjektiv. Es folgt

$$B \cong S(V)/\mathrm{Ker}(\tilde{i}).$$

Mit anderen Worten, jede kommutative A-Algebra ist ein Faktor einer symmetrischen Algebra über A.

(ii) Ist $(f,h): (A,M) \longrightarrow (B,N)$ ein Morphismus der Kategorie **Mod** so kann man die die Zusammensetzung

$$M \xrightarrow{h} N \xhookrightarrow{i_N} S_B(N)$$

von h mit der natürlichen Einbettung von N in die symmetrische Algebra als Homomorphismus von A-Moduln mit Werten in der A-Algebra $S_B(N)$ auffassen.

Auf Grund der Universalitätseigenschaft der symmetrischen Algebren, gibt es genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$S(h) := S(f,h): S_A(M) \longrightarrow S_B(N),$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S_A(M) & \xrightarrow{S(h)} & S_B(N) \\ i_A \uparrow & & i_B \uparrow \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

kommutativ ist. Auf diese Weise wird der Übergang zur symmetrischen Algebra zu einem Funktor

$$S: \mathbf{Mod} \longrightarrow (\mathbf{commutative\ Rings}),\ (A,M) \mapsto S_A(M),\ (f,h) \mapsto S(f,h),$$

der Kategorie **Mod** der Moduln mit Werten in der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1.

(iii) Seien f: $A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1 und M ein A-Modul. Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$S_A(M)\otimes_A B \xrightarrow{\cong} S_B(M\otimes_A B).$$

Denn aus dem natürlichen Isomorphismus

$$T_A(M)\otimes_A B \xrightarrow{\cong} T_B(M\otimes_A B)$$

von 2.5 (v) erhält man Anwenden des Funktors

$$S_A(M)\otimes_{T_A(M)} B = (T_A(M)/I'(M))\otimes_{T_A(M)}$$

einen Isomorphismus

$$S_A(M)\otimes_A B \xrightarrow{\cong} T_B(M\otimes_A B)/I'(M)\bullet T_B(M\otimes_A B)$$

Die natürliche Abbildung $M \longrightarrow M\otimes_A B$ induziert eine Abbildung

$$I'(M) \longrightarrow I'(M\otimes_A B).$$

Deren Bild erzeugt ein Ideal von $T_B(M\otimes_A B)$, welches erzeugt wird von den Elementen der Gestalt

$$(x\otimes 1)\otimes(y\otimes 1) - (y\otimes 1)\otimes(x\otimes 1) \text{ mit } x, y \in M.$$

Durch Multiplikation mit $(1\otimes c)\bullet(1\otimes d)$ mit $c, d \in B$ erhalten wir Elemente der Gestalt

$$(x\otimes c)\otimes(y\otimes d) - (y\otimes d)\otimes(x\otimes c) \text{ mit } x, y \in M, c,d \in B$$

welche auch in diesem Ideal liegen. Die Elemente dieser Gestalt erzeugen aber das Ideal $I'(M\otimes_A B)$. Damit gilt $I'(M)\bullet T_B(M\otimes_A B) = I'(M\otimes_A B)$, also

$$S_A(M)\otimes_A B \xrightarrow{\cong} T_B(M\otimes_A B)/ I'(M\otimes_A B) = S_B(M\otimes_A B)$$

Bemerkung
Nachfolgend wollen wir die Beschreibung von A-Algebren als Faktoren einer Tensor-Algebra an einigen Beispielen illustrieren. Dazu benötigen wir den Begriff des Ideals.

2.11 Vergleich mit den Polynom-Algebren

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein endlich erzeugter freier A-Modul mit dem A-linear unabhängigen Erzeugendensystem $m_1,...,m_n \in M$ und

$$S := A[x_1,...,x_n]$$

die A-Algebra der Polynome in $x_1,...,x_n$ mit Koeffizienten aus A. Dann gibt es genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$A[x_1,...,x_n] \to S(V) \text{ mit } x_i \mapsto v_i .$$

Dieser Homomorphismus ist sogar ein Isomorphismus.

Beweis. Betrachten wir die A-lineare Abbildung

$$j:M \to A[x_1,...,x_n],\ c_1m_1+...+c_1m_n \mapsto c_1x_1+...+c_1x_n .$$

<u>1. Schritt</u>. Die Polynom-Algebra besitzt die Universalitätseingenschaft der Symmetrischen Algebra.

Seien S eine kommutative A-Algebra und

$$f: M \to S$$

eine A-lineare Abbildung. Wir haben zu zeigen, es gibt genau einen Homomorphismus von A-Algebren

$$\tilde{f}:K[x_1,...,x_n] \to S$$

mit $\tilde{f}\circ j = f$.

<u>Existenz von</u> $\tilde{f}$. Für jedes Polynom $p\in A[x_1,...,x_n]$ setzen wir

$$\tilde{f}(p) = p(f(v_1),...,f(v_n)),$$

d.h. wir ordnen jedem Polynom p den Wert an der Stelle $(f(v_1),...,f(v_n))$ zu. Auf diese Weise ist ein Homomorphismus von A-Algebren definiert,

$$\tilde{f}:A[x_1,...,x_n] \to S$$

Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\circ j(c_1v_1+...+c_1v_n) &= \tilde{f}(c_1x_1+...+c_1x_n) && \text{(nach Definition von j)}\\
&= c_1f(v_1)+...+c_1f(v_n) && \text{(nach Definition von } \tilde{f}\text{)}\\
&= f(c_1v_1+...+c_1v_n) && \text{(weil f linear ist)}
\end{aligned}$$

d.h. es gilt $\tilde{f}\circ j = f$.

<u>Eindeutigkeit von</u> $\tilde{f}$. Falls $\tilde{f}$ existiert, so gilt für jedes Polynom p

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(p) = \tilde{f}(p(x_1,...,x_n)) &= p(\tilde{f}(x_1),...,\tilde{f}(x_n)) && (\tilde{f} \text{ ist Algebra-Homomorphismus})\\
&= p(\tilde{f}(j(v_1)),...,\tilde{f}(j(v_n))) && \text{(nach Definition von j)}\\
&= p((f(v_1),...,f(v_n)) && (\text{wegen } \tilde{f}\circ j = f).
\end{aligned}$$

Die Abbildung $\tilde{f}$ ist somit durch f eindeutig festgelegt.
<u>2. Schritt</u>: Vergleich von S(M) und $A[x_1,...,x_n]$.

Betrachten wir die folgenden beiden kommutativen Diagramme.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & S(M) \\
A[x_1,...,x_n] \arrow[ur, "\tilde{i}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & A[x_1,...,x_n] \\
S(M) \arrow[ur, "\tilde{j}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei seien j die oben definierte A-lineare Abbildung und $i: M \hookrightarrow S(M)$ die natürliche Einbettung. Die A-Algebra-Homomorphismen $\tilde{i}$ und $\tilde{j}$ existieren auf Grund der Universalitätseigenschaften von j bzw. i und sind durch die Kommutativität der beiden Diagramme eindeutig festgelegt. Durch Zusammensetzen der beiden Diagramme erhalten wir die beiden folgenden kommutativen Diagramme.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & S(M) \\
S(M) \arrow[ur, "\tilde{i}\circ\tilde{j}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & A[x_1,...,x_n] \\
A[x_1,...,x_n] \arrow[ur, "\tilde{j}\circ\tilde{i}"'] &
\end{tikzcd}$$

Diese Diagramme bleiben kommutativ, wenn man $\tilde{i}\circ\tilde{j}$ und $\tilde{j}\circ\tilde{i}$ durch identische Abbildungen ersetzt. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussagen der Universalitätseigenschaften von i und j folgt

$$\tilde{i}\circ\tilde{j} = \mathrm{Id} \text{ und } \tilde{j}\circ\tilde{i} = \mathrm{Id}.$$

Die A-Algebra-Homomorphismen $\tilde{i}$ und $\tilde{j}$ sind also zueinander inverse Isomorphismen.

Außerdem gilt für jedes α:

$$\tilde{i}(x_\alpha) = \tilde{i}(j(v_\alpha)) = i(v_\alpha) = v_\alpha.$$

QED.

Bemerkungen

(i) Das Bild

$$S(M)_\ell$$

der ℓ-ten Tensorpotenz $M^{\otimes\ell} = T(M)_\ell$ bei der natürlichen Abbildung

$$\rho\colon T(M) \longrightarrow S(M),\ v_1\otimes\ldots\otimes v_i \mapsto v_1\bullet\ldots\bullet v_i$$

heißt ℓ-te <u>symmetrische Potenz</u> von M. Beim gerade konstruierten Isomorphismus

$$S(M) \xrightarrow{\cong} A[x_1,\ldots, x_n]$$

entspricht diese ℓ-te symmetrische Potenz den homogenen Polynomen

$$\sum_{|i|=\ell} c_i x^i \in A[x_1,\ldots, x_n]$$

des Grades ℓ des Polynomrings. Insbesondere hat dieser freie A-Modul den Rang

$$\mathrm{rank}_A\, S(M)_\ell = \binom{\ell+n-1}{n-1}.$$

(ii) Da die $M^{\otimes\ell}$ den Vektorraum T(M) erzeugen, erzeugen die $S(M)_\ell$ den Faktorraum S(M),

$$S(M) = \sum_{\ell=0}^{\infty} S(M)_\ell.$$

Da sich jedes Polynom auf genau eine Weise als Summe homogener Polynome schreiben läßt, ist diese Summe sogar direkt.

$$S(M) = \oplus_{\ell=0}^{\infty} S(M)_\ell.$$

(iii) Die symmetrischen Potenzen lassen sich in ähnlicher Weise durch eine Universalitätseigenschaft charakterisieren, wie die Tensorpotenzen. Für jeden A-Modul N bezeichne

$$S(M, N)_\ell$$

den A-Modul der ℓ-linearen symmetrischen Abbildungen $M\times\ldots\times M \longrightarrow N$. Weiter sei σ_ℓ die natürliche Abbildung

$$\sigma_\ell\colon M\times\ldots\times M \xrightarrow{\rho_\ell} M^{\otimes\ell} \longrightarrow S(M)_\ell,\ (v_1,\ldots, v_\ell) \mapsto v_1\bullet\ldots\bullet v_\ell,$$

(welche symmetrisch ist, denn S(M) ist kommutativ).Dann ist die lineare Abbldung

$$\mathrm{Hom}_A(S(M)_\ell, N) \longrightarrow S(M, N)_\ell,\ \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\sigma_\ell,$$

ein Isomorphismus für jedes N. Diese Aussage ist auch für nicht notwendig freie A-Moduln richtig. Sind M und N frei und vom endlichen Rang, so gilt

$$\mathrm{rank}_A\, S(M, N)_\ell = \mathrm{rank}_A\, S(M)_\ell \bullet \mathrm{rank}_A N = \binom{\ell+n-1}{n-1} \bullet \mathrm{rank}_A N.$$

Beweis Zu (i). Wir beweisen die Dimensionsformel durch Induktion nach dem Rang von M, d.h. nach der Anzahl n der Unbestimmen $x_1,\dots, x_n$.

Im Fall n = 1 ist der A-Modul der homogenen Polynome des Grades ℓ von $A[x_1]$ eindimensional für jedes ℓ,

$$\dim S(M)_\ell = 1 = \binom{\ell+0}{0} = \binom{\ell+n-1}{n-1}.$$

Sei jetzt n > 1. Jedes homonene Polynom $p(x_1,\dots, x_n)$ des Grades ℓ läßt sich in der folgenden Gestalt schreiben:

$$p(x_1,\dots, x_n) = p_0(x_1,\dots, x_{n-1})x_n^\ell + p_1(x_1,\dots, x_{n-1})x_n^{\ell-1}+\dots+p_n(x_1,\dots, x_{n-1})$$

mit eindeutig bestimmten homogenen Polynomen $p_i(x_1,\dots, x_{n-1})$ des Grades i in den Unbestimmten $x_1,\dots, x_{n-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat der A-Modul der Polynome der Gestalt $p_i(x_1,\dots, x_{n-1})$ den Rang

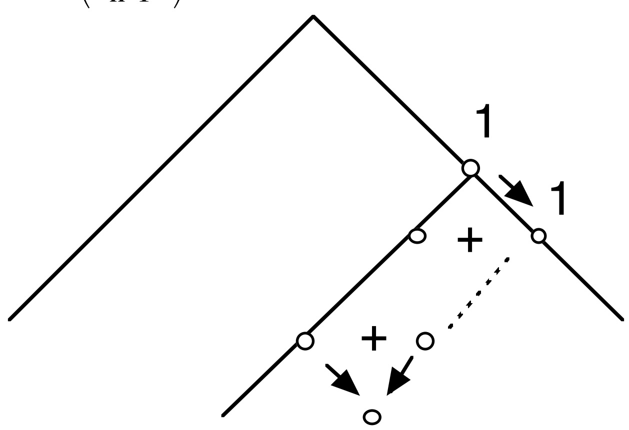
$$\binom{i+n-2}{n-2}$$

Für den gesuchten Rang erhalten wir damit

$$\mathrm{rank}\, S(M)_\ell = \binom{\ell+n-2}{n-2} + \binom{\ell-1+n-2}{n-2} + \binom{\ell-2+n-2}{n-2} + \dots + \binom{0+n-2}{n-2}$$

Mit Hilfe der Standard-Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks sehen wir, es gilt

$$\mathrm{rank}\, S(M)_\ell = \binom{\ell+n-1}{n-1}.$$



Zu (ii). Es ist nichts zu zeigen.
Zu (iii). Wir haben die Bijektivität der Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A(S(M)_\ell, N) \longrightarrow S(M, N)_\ell,\ \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\sigma_\ell,$$

zu beweisen. Sei $f \in S(M, N)_\ell$, d.h. sei

$$f: M \times ... \times M \longrightarrow N$$

eine ℓ-lineare symmetrische Abbildung. Als ℓ-lineare Abbildung faktorisiert sich f eindeutig über die natürliche Abbildung ρ_ℓ. $M\times...\times M \longrightarrow M^{\otimes\ell}$,

$$f: M\times...\times M \xrightarrow{\rho_\ell} M^{\otimes\ell} \xrightarrow{\tilde f} N,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde f$ mit $f = \tilde f\circ\rho_\ell$, d.h. mit

$$\tilde f(v_1\otimes...\otimes v_\ell) = \tilde f(\rho_\ell(v_1,...,v_\ell)) = f(v_1,...,v_\ell).$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß sich $\tilde f$ eindeutig über die natürliche Surjektion $M^{\otimes\ell} \longrightarrow S(M)_\ell$ faktorisiert. Wegen der Surjektivität dieser Surjektion ist die Faktorisierung, falls sie existiert, eindeutig. Es reicht also, die Existenz zu beweisen. Nach dem Homomorphie-Satz reicht es zu zeigen,

$$\tilde f(\mathrm{Ker}(M^{\otimes\ell} \longrightarrow S(M)_\ell)) = 0.$$

Der Kern der natürlichen Abbildungt $T(M) \longrightarrow S(M)$ ist gerade das Ideal $I'(M)$. Der Kern der natürlichen Surjektion

$$M^{\otimes\ell} \longrightarrow S(M)_\ell$$

besteht somit gerade aus den homogenen Elementen des Grades ℓ von $I'(M)$, d.h. dieser Kern wird als A-Modul gerade von den Elementen der folgenden Gestalt erzeugt.

$$\alpha\otimes(v\otimes w - w\otimes v)\otimes\beta$$

mit $v, w \in M$,

$$\alpha = v_1\otimes...\otimes v_a,\ v_i \in M$$

$$\beta = w_1\otimes...\otimes w_b,\ w_i \in M$$

und $a + 2 + b = \ell$. Wir reicht zu zeigen, alle Elemente dieser Gestalt werden durch $\tilde f$ in die Null abgebildet. Es gilt

$$\begin{aligned}\tilde f(\alpha\otimes(v\otimes w - w\otimes v)\otimes\beta) &= \tilde f(\alpha\otimes v\otimes w\otimes\beta) - \tilde f(\alpha\otimes w\otimes v\otimes\beta)\\ &= f(v_1,...,v_a,v,w,w_1,...,w_b) - f(v_1,...,v_a,w,v,w_1,...,w_b)\\ &= 0\end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt dabei, weil $\tilde f$ linear ist, das zweite auf Grund der Definition von $\tilde f$. Das dritte Gleichheitszeichen schließlich gilt, weil f symmetrisch ist.
QED.

2.12 Die äußere Algebra

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und

$$I''(M) \subseteq T(M)$$

das von den Elementen der Gestalt

$$x\otimes x \text{ mit } x\in M$$

erzeugte Ideal. dann heißt

$$\wedge(M) := \wedge_A(M) := T(M)/I''(M)$$

äußere Algebra von M über A. Die Zusammensetzung

$$M \to T(M) \xrightarrow{\rho} \wedge(M)$$

der natürlichen Einbettung (im Grad 1) mit der natürliche Abbildung auf den Faktorring heißt wieder natürliche Einbettung (im Grad 1). Analog definiert man die natürliche Einbettung

$$A \to T(M) \xrightarrow{\rho} \wedge(M)$$

im Grad 0.

Bemerkungen

(i) Die natürlichen Einbettungen sind injektiv, weil $I''(V) = Ker(\rho)$ aus Summen von homogenen Elementen eines Grades ≥ 2 besteht. Sie gestatten es somit M und A mit Teilmengen von $\wedge(M)$ zu identifizieren.

(ii) Das Bild von $v_1 \otimes ... \otimes v_r \in T(V)$ bei der natürlichen Abbildung

$$T(V) \xrightarrow{\rho} \wedge(V),\ v_1 \otimes ... \otimes v_r \mapsto v_1 \wedge ... \wedge v_r$$

auf den Faktorraum wird mit $v_1 \wedge ... \wedge v_r$ bezeichnet. Die äußere Algebra besteht also aus endlichen Summen von Elementen der Gestalt $v_1 \wedge ... \wedge v_r$.

2.13 Die Universalitätseigenschaft der äußeren Algebra

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul, B eine A-Algebra und

$$f: M \to B$$

eine A-lineare Abbildung mit

$$f(v)f(v) = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

Dann gibt es genau eine Fortsetzung

$$\tilde{f}: \wedge(M) \to B$$

von f zu einen Homomorphismus von A-Algebren, d.h. es gibt genau einen Homomorphismus von A-Algebren $\tilde{f}: \wedge(B) \to B$, dessen Zusammensetzung mit der der natürlichen Einbettung

$$\bar{i}: M \xrightarrow{i} T(M) \xrightarrow{\rho} T(M)/I''(M) = \wedge(M)$$

gleich f ist.

Beweis. Existenz von $\tilde{f}$.Auf Grund der Universalitätseigenschatt der Tensor-Algebra gibt es genau eine Fortsetzung

$$f': T(M) \to S$$

zu einen Homomorphismus von A-Algebren. Für beliebige Vektoren $x \in M$ und beliebige Tensoren $t', t'' \in T(M)$ gilt

$$f'(t'(x \otimes x)t'') = f'(t')(f'(x)f'(x)f'(t'') = 0,$$

Mit anderen Worten, ein Erzeugendensystem des definierenden Ideals I"(M) liegt im Kern von f';

$$I''(M) \subseteq Ker(f').$$

Auf Grund des Homomorphie-Satzes faktorisiert sich f' eindeutig über die natürliche Surjektion auf den Faktorraum modulo dem Ideal I"(V), d.h. über

$$\rho: T(M) \longrightarrow \wedge(M) = T(M)/I''(M),$$

$$f': T(V) \xrightarrow{\rho} \wedge(V) \xrightarrow{\tilde{f}} S,$$

d.h. es gibt genau einen A-Algebra-Homomorphismus $\tilde{f}$ mit $f' = \tilde{f}\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{f}(x_1\wedge...\wedge x_i) = \tilde{f}(\rho(x_1\otimes...\otimes x_i)) = f'(x_1\otimes...\otimes x_i) = f(x_1)\bullet...\bullet f(x_i)$$

Speziell für i = 1 sehen wir, daß $\tilde{f}$ die Abbildung f fortsetzt.

Eindeutigkeit von $\tilde{f}$.

Sei $\tilde{f}': \wedge(V) \xrightarrow{\tilde{f}} S$ ein weiterer A-Algebra-Homomorphismus mit $\tilde{f}'\circ \bar{i} = f$. Dann gilt

$$\tilde{f}'\circ\rho\circ i = \tilde{f}'\circ \bar{i} = f = \tilde{f}'\circ \bar{i} = \tilde{f}\circ\rho\circ i,$$

d.h. $\tilde{f}'\circ\rho$ und $\tilde{f}\circ\rho$ sind zwei Fortsetzung von f auf T(M). Auf Grund der Universalitätseigenschaft von T(M) folgt $\tilde{f}'\circ\rho = \tilde{f}\circ\rho$. Weil ρ surjektiv ist, muß

$$\tilde{f}' = \tilde{f}$$

gelten.

QED.

2.14 Vergleich mit den Graßmann-Algebren

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein freier A-Modul mit dem über A linear unabhängigen Erzeugendensystem $m_1,...,m_n \in M$. Für festes $k\in\mathbb{N}$ und jede echt aufsteigende Folge

$$i_1 < i_2 < ... < i_k$$

von natürlichen Zahlen aus {1,...,n} führen wir ein Symbol

(1) $$e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge e_{i_k}$$

ein. Bezeichne

$$\wedge^k A^n = \oplus\, Ae_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge e_{i_k}$$

den von der Menge dieser Symbole frei erzeugten A-Modul. Für k = 1 erhalten wir den freien A-Modul vom Rang n,

$$\wedge^1 A^n = Ae_1+....+Ae_n = A^n.$$

Für k = n erhalten wir den freien A-Modul vom Rang 1,

$$\wedge^n A^n = A\bullet e_1\wedge....\wedge e_n$$

und für k > n ist $\wedge^k A^n = 0$. Für k = 0 wollen wir

$$\wedge^0 A^n = A$$

setzen.. Schließlich sei

(2) $$A<e_1,...,e_n> := \oplus_{k=0}^{\infty} \wedge^k A^n = \wedge^0 A^n \oplus \wedge^1 A^n \oplus .....\oplus \wedge^n A^n$$

die direkte Summe aller $\wedge^k A^n$ Wir wollen jetzt auf dem Vektorraum (2) eine Multiplikation einführen. Dazu ist es nützlich, die Symbole (1) auch zu definieren, wenn die indizes i_ν keine echt aufsteigende Folge bilden. Für jede Permutation $\pi\in S_k$ setzen wir

$$e_{i_{\pi(1)}}\wedge e_{i_{\pi(2)}}\wedge\ldots\wedge e_{i_{\pi(k)}} := \mathrm{sign}(\pi)\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$$

Weiter vereinbaren wir, daß ein Symbol der Gestalt (1) mit mehrfach auftretenden Indizes den Nullvektor bezeichnen soll. Mit diesen Vorbereitungen können wir eine Multiplikation in

$$K<e_1,\ldots,e_n>$$

einführen, inden wir setzen

$$\Big(\sum_{i_1\ldots i_k} a'_{i_1\ldots i_k} e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\Big)\cdot\Big(\sum_{j_1\ldots j_\ell} a''_{j_1\ldots j_k} e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_\ell}\Big)$$

$$:= \sum_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_\ell} a'_{i_1\ldots i_k} a''_{j_1\ldots j_k} e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\wedge e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_\ell}$$

Dann gibt es genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$A<e_1,\ldots,e_n> \to \wedge(V) \text{ mit } e_i \mapsto m_i\ .$$

Dieser Homomorphismus ist sogar ein Isomorphismus.

Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$j: M \to A<e_1,\ldots,e_n>,\ \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha v_\alpha \mapsto \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha e_\alpha$$

<u>1. Schritt</u>. $A<e_1,\ldots,e_n>$ hat zusammen mit j der Universalitätseigenschaft der äußeren Algebra.

Seien B eine A-Algebra und

$$f: M \to B$$

eine A-lineare Abbildung mit

$$f(x)\cdot f(x) = 0 \text{ für jedes } x\in M.$$

Wir haben zu zeigen, es gibt genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{f}: A<e_1,\ldots,e_n> \to B$$

mit $\tilde{f}\circ j = f$, d.h. mit

$$\tilde{f}(e_\alpha) = \tilde{f}(j(v_\alpha)) = f(v_\alpha).$$

<u>Eindeutigkeit von</u> $\tilde{f}$.

Jedes Element von $A< e_1,\ldots,e_n>$ hat die Gestalt

$$x = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k} a^k_{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$$

Falls $\tilde{f}$ existiert, so gilt

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k} a^k_{i_1,\ldots,i_k} \tilde{f}(e_{i_1})\bullet\tilde{f}(e_{i_2})\bullet\ldots\bullet\tilde{f}(e_{i_k})) \quad (\tilde{f} \text{ ist K-Algebra-Homomorphismus})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k} a^k_{i_1,\ldots,i_k} f(e_{i_1})\bullet f(e_{i_2})\bullet\ldots\bullet f(e_{i_k}) \quad (\text{wegen } \tilde{f}\circ\bar{i} = f).$$

Damit ist die Eindeutigkeit von $\tilde{f}$ bewiesen.

Existenz von $\tilde{f}$. Wir setzen

$$\tilde{f}(x) := \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k} a^k_{i_1,\ldots,i_k} f(e_{i_1})\bullet f(e_{i_2})\bullet\ldots\bullet f(e_{i_k})$$

für

$$x = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k} a^k_{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}.$$

Diese Definition ist korrekt, weil die Vektoren

$$e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}.$$

mit $i_1 < \ldots < i_k$ ein A-linear unabhängiges Erzeugendensystem von $A<e_1,\ldots,e_n>$ bilden, d.h. weil die Koeffizienten $a^k_{i_1,\ldots,i_k}$ durch x eindeutig bestimmt sind. Nach Definition gilt dann insbesondere

$$\tilde{f}(j(v_\alpha)) = \tilde{f}(e_\alpha) = f(e_\alpha),$$

d.h. es ist $\tilde{f}\circ j = f$. Nach Konstruktion ist $\tilde{f}$ A-linear. Wir haben noch zu zeigen,

$$\tilde{f}(c'\cdot c'') = \tilde{f}(t')\cdot \tilde{f}(t'') \text{ für } c',c''\in K< e_1,\ldots,e_n>.$$

Das sieht man durch direktes Nachrechnen.

QED.

Bemerkungen

(i) Das Bild

$$\wedge(M)_\ell$$

der ℓ-ten Tensorpotenz $M^{\otimes\ell} = T(M)_\ell$ bei der natürlichen Abbildung

$$\rho: T(M) \longrightarrow \wedge(M),\ x_1\otimes\ldots\otimes x_i \mapsto x_1\wedge\ldots\wedge x_i$$

heißt ℓ-te äußere Potenz von M. Beim gerade konstruierten Isomorphismus

$$\wedge(M) \xrightarrow{\cong} A<e_1,\ldots,e_n>$$

entspricht diese ℓ-te äußere Potenz gerade den A-Linearkombinationen von ℓ-fachen äußeren Produkten der Vektoren e_i. Insbesondere hat dieser freie A-Modul den Rang

$$\dim \wedge(M)_\ell = \binom{n}{\ell}.$$

(ii) Da die $M^{\otimes\ell}$ den A-Modul T(M) erzeugen, erzeugen die $\wedge(M)_\ell$ den Faktormodul $\wedge((M)$,

$$\wedge(M) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \wedge(M)_\ell.$$

Da sich jedes Element der Graßmann-Algebra auf genau eine Weise als Summe homogener Elemente schreiben läßt, ist diese Summe sogar direkt.

$$\wedge(M) = \oplus_{\ell=0}^{\infty} \wedge(M)_\ell.$$

(iii) Die äußeren Potenzen lassen sich in ähnlicher Weise durch eine Universalitätseigenschaft charakterisieren, wie die Tensorpotenzen und die symmetrischen Potenzen. Für jeden A-Modul U bezeichne

$$\wedge(M, N)_\ell$$

den A-Modul der ℓ-linearen schiefsymmetrischen Abbildungen $M\times\ldots\times M \longrightarrow M$. Weiter sei δ_ℓ die natürliche Abbildung

$$\delta_\ell\colon M\times\ldots\times M \xrightarrow{\rho_\ell} M^{\otimes\ell} \longrightarrow \wedge(M)_\ell,\ (x_1,\ldots, x_\ell) \mapsto x_1\wedge\ldots\wedge x_\ell,$$

(welche schiefsymmetrisch ist, denn in $\wedge(V)$ antikommutieren die homogenen Elemente des Grades 1). Dann ist die lineare Abbldung

$$\mathrm{Hom}_A(\wedge(M)_\ell, N) \longrightarrow \wedge(M, N)_\ell,\ \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\delta_\ell,$$

ein Isomorphismus für jeden A-Modul N.
Dies gilt auch für nicht-notwendig freie oder endlich erzeugte A-Moduln M. Sind M und N freie endlich erzeugte A-Moduln gilt

$$\mathrm{rank}_A\ \wedge(M, N)_\ell = \mathrm{rank}_A\ \wedge(M)_\ell\cdot\mathrm{rank}_A\ N = \binom{n}{\ell}\cdot\mathrm{rank}_A\ N \text{ mit } n = \mathrm{rank}_A\ M.$$

(iv) Der Übergang zu den äußeren Potenzen ist funktoriell. Insbesondere ist für jeden linearen Endomorphismus

$$f\colon M \longrightarrow M$$

eines freien Moduls M vom Rang n die induzierte Abbildung auf der höchsten äußeren Potenz

$$\wedge(f)_n\colon \wedge(M)_n \longrightarrow \wedge(M)_n,\ x \mapsto \det(f)\cdot x$$

gerade die Multiplikation mit der Determanten von f.

Beweis. Die Beweise sind analog zu den Beweisen der entsprechenden Aussagen zur symmetrischen Algebra. Die letzte Aussage ergibt sich durch Wahl einer Basis von M und der zugehörigen Basis des freien Moduls vom Rang $\wedge(M)_\ell$ zusammen mit der Leibnitzschen Determinanten-Formel. Für

$$M = Am_1 + \ldots + Am_n$$

und

$$f(m_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}m_j$$

erhalten wir

$$\wedge(M)_n = Am_1\wedge\ldots\wedge m_n$$

und

$$\begin{aligned}
f(m_1\wedge\ldots\wedge m_n) &= f(m_1)\wedge\ldots\wedge f(m_n)\\
&= \Big(\sum_{\alpha_1=1}^{n} a_{\alpha_1 1}m_{\alpha_1 j}\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{\alpha_n=1}^{n} a_{\alpha_n n}m_{\alpha_n}\Big)\\
&= \sum_{\alpha_1=1}^{n}\ \ldots\ \sum_{\alpha_n=1}^{n} a_{\alpha_1 1}\cdot\ldots\cdot a_{\alpha_n n}\cdot m_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge m_{\alpha_n}
\end{aligned}$$

Summanden, in denen rechts einer der Basis-Vektoren doppelt vorkommt sind dabei gleich Null. Statt unabhängig voneinander über alle α_i zu summieren reicht es über alle Permutationen $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ von $(1, \dots, n)$ zu summieren:

$$f(m_1\wedge\dots\wedge m_n) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}\cdot\dots\cdot a_{\sigma(n)n}\cdot m_{\sigma(1)}\wedge\dots\wedge m_{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdot\dots\cdot a_{\sigma(n)n}\cdot m_1\wedge\dots\wedge m_n$$

$$= \det(a_{ij})\cdot m_1\wedge\dots\wedge m_n.$$

QED.

2.15 Die Clifford-Algebra

Seien V ein K-Vektorraum mit symmetrischer bilinearer Abbildung $b: V \times V \longrightarrow K$ und

$$J(V) \subseteq T(V)$$

das von den Elementen der Gestalt

$$v\otimes v - b(v,v) \text{ mit } v\in V$$

erzeugte Ideal. dann heißt

$$C(V) = C_K(V) = T(V)/J(V)$$

Clifford-Algebra von b über K. Die Zusammensetzung

$$V \xrightarrow{i} T(V) \xrightarrow{\rho} C(V)$$

der natürlichen Einbettung (im Grad 1) mit der natürliche Abbildung auf den Faktorring heißt wieder natürliche Einbettung (im Grad 1). Analog definiert man die natürliche Einbettung

$$K \rightarrow T(V) \xrightarrow{\rho} C(V)$$

im Grad 0.

Bemerkungen

(i) Ist b identisch Null, so fällt die Clifford-Algebra mit der äußeren Algebra zu sammen, die Clifford-Algebra verallgemeinert also den Begriff der äußeren Algebra.

(ii) Die Injektiviät der natürlichen Einbettungen ist im Fall der Clifford-Algebra weniger offensichtlich als im Fall der symmetrischen oder äußeren Algebren. Sie ergibt als Nebeneffekt einer genaueren Analyse der Struktur der Clifford-Algebra, die wir hier nur skitzieren wollen.

(iii) Schreibt man

$$T(V) = T'(V) \oplus T''(V)$$

mit

$$T'(V) = \oplus_{n=0}^{\infty} T(V)_{2n} \text{ und } T''(V) = \oplus_{n=0}^{\infty} T(V)_{2n+1}$$

so erhält man eine zweite Beschreibung der Tensoralgebra als graduierter Ring, wobei homogene Elemente nur den Grad 0 oder 1 haben können. Dabei muß man den Grad als Restklasse modulo 2 betrachten,

$$\deg x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2 \text{ für x homogen}$$

damit für homogene Elemente x und y weiterhin gilt

$$\deg (xy) = \deg x + \deg y.$$

Bezüglich dieser neuen Graduierung wird das definierende Ideal J(V) der Clifford-Algebra von homogenen Elementen (des Grades 0) erzeugt. Das hat zur Folge, daß auch die Clifford-Algebra eine Graduierung

$$C(A) = C'(A) \oplus C''(A).$$

besitzt. Um diese neue Graduierung von der bisher betrachteten zu unterscheiden, nennen wir die letztere eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung, die erstere eine $\mathbb{Z}$-Graduierung.

(iv) Sind $x, y \in V$ zwei Elemente mit $x \perp y$ bezüglich $b = < , >$, so gilt in C(V):

$$\begin{aligned} x\bullet y + y\bullet x &= (x+y)\bullet(x+y) - x\bullet x - y\bullet y \\ &= \langle x+y, x + y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \\ &= \langle x , y \rangle + \langle y, x \rangle \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Elemente aus V, die aufeinander senkrecht stehen anit-kommutieren also in C(V),

$x\bullet y \quad = - y\bullet x$ in C(V) für Elemente $x, y \in V$ mit $x \perp y$.

Da jedes Element von C(V) eine Summe von Produkten von Elementen aus V ist, ergibt sich daraus für homogene Elemente

$x\bullet y \quad = (-1)^{\deg x\bullet\deg y}\, y\bullet x$ für homogene Elemente $x, y\in C(V)$.

2.16 Das Tensorprodukt graduierter Algebren

Seien K ein Körper und S, S' zwei K-Algbren. Dann besitzt

$$S\otimes_K S' \tag{1}$$

die Strutur einer K-Algebra mit

$$(s\otimes s')\bullet(t\otimes t') = (st)\otimes(s't') \quad \text{für } s,t, \in S \text{ und } s',t' \in S'.$$

Sind S und S' graduierte K-Algebren, d.h. zerfallen sie als K-Vektorräume in direkte Summen

$$S = \oplus_{d=0}^{\infty} S_d \text{ und } S' = \oplus_{d=0}^{\infty} S'_d$$

mit

$$S_a\bullet S_b \subseteq S_{a+b} \text{ bzw. } S'_a\bullet S'_b \subseteq S'_{a+b}$$

für alle a und b, so kann man die Multiplikation auf (1) auch so wählen, daß gilt

$$(s\otimes s')\bullet(t\otimes t') = (-1)^{ab}(st)\otimes(s't') \quad \text{für } s\in S, s'\in S_a, t \in S'_b\ s',t' \in S'.$$

Das Tensorprodukt (1) mit dieser abgeändertern Multiplikation heißt auch <u>graduiertes Tensorprodukt</u> der graduierten K-Algebren S und S' und wird mit

$$S \tilde{\otimes} S'$$

bezeichnet.

Beweis. Die Abbildung

$$\varphi: S\times S'\times S\times S' \longrightarrow S\otimes_K S', (s,s',t,t') \mapsto (st)\otimes(s't'),$$

ist linear in s, t, s' und t'. Sie faktorisiert sich deshalb über die natürliche Abbildung[13]

$$\rho: S\times S'\times S\times S \longrightarrow S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S, (s, s', t, t') \mapsto s\otimes s'\otimes t\otimes t',$$

---

[13] Wir haben das eigentlsich nur für den Fall S = S' gezeigt. Mit Hilfe der vierten Tensorpotenz von $S\oplus S'$ und deren Universalitätseigenschaft erhält man diese Ausage durch einschränken auf den direken Summannden $S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S$ von $(S\oplus S')^{\otimes 4}$.

ins Tensorprodukt:

$$\varphi: S\times S'\times S\times S \xrightarrow{\rho} S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} S\otimes_K S'$$

mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $\tilde{\varphi}$ mit $\varphi = \tilde{\varphi}\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{\varphi}(s\otimes s'\otimes t\otimes t') = \varphi(s,s',t,t') = (st)\otimes(s't').$$

Durch Zusammensetzen von $\tilde{\varphi}$ mit der natürlichen Abbildung

$\rho': S\otimes_K S' \times S\otimes_K S' \longrightarrow S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S'$, $(x, y) \mapsto x\otimes y$,

erhalten wir eines Abbildung

$$\psi = \tilde{\varphi}\circ\rho': S\otimes_K S' \times S\otimes_K S' \longrightarrow S\otimes_K S'$$

mit

$$\psi(s\otimes s', t\otimes t') = \tilde{\varphi}(\rho'(s\otimes s', t\otimes t')) = \tilde{\varphi}(s\otimes s'\otimes t\otimes t') = (st)\otimes(s't').$$

Wir haben gezeigt, die oben angegebene Formel für die Multiplikation in $S\otimes_K S'$ beschreibt eine wohldefinierte Abibldung.

Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß die so definierte Multiplikation die üblichen Eigenschaften hat und $S\otimes_K S'$ mit der Struktur einer K-Algebra versieht.

Die modifizierte Formel für die Multiplikation im Fall graduierter K-Algebren

$$S = \oplus_{n=0}^{\infty} S_n \text{ und } S' = \oplus_{n=0}^{\infty} S'_n$$

ergibt sich aus der eben konstruierten durch Zusammensetzen mit einem linearen Endomorphismus von

$$S\otimes_K S' = \oplus_{n=0}^{\infty} \oplus_{a+b=n} S_a\otimes S'_b,$$

der auf $S_a\otimes S'_b$ in der Multiplikation mit $(-1)^{ab}$ besteht.

QED.

2.17 Die Universalitätseigenschaft der Clifford-Algebra

Seien V ein K-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform

$$b: V \times V \longrightarrow K.$$

Für jede K-Algbra S und jede K-lineare Abbildung

$$f: V \longrightarrow S$$

mit

$$f(v)^2 = b(v,v)\cdot 1_S$$

gibt es genau einen K-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{f}: C(V) \longrightarrow S$$

mit

$$f = \tilde{f}\circ i,$$

wobei $i: V \longrightarrow C(V)$ die oben beschriebene natürliche Einbettung bezeichne.

Beweis. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Tensor-Algebra läßt sich f auf genau eine Weise zu einem K-Algebra-Homomorphismus

$$f': T(V) \longrightarrow S$$

fortsetzen. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, das definierende Ideal J(V) der Clifford-Algebra

$$C(V) = T(V)/J(V)$$

liegt ganz im Kern von f',

$$J(V) \subseteq \mathrm{Ker}(f'), \qquad (1)$$

denn dann faktorisiert sich f' eindeutig über die natürliche Abbildung $T(V) \longrightarrow C(V)$. Zum Beweis von (1) reicht es zu zeigen, ein Erzeugendensystem des Ideals J(V) liegt ganz im Kern von f', d.h. es reicht zu zeigen,

$$f'(\, v \otimes v - b(\, v, v)\,) = 0$$

für jedes $v \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(\, v \otimes v - b(v, v)) &= f'(v \otimes v\,) - f'(b(v,v))\bullet 1) \\ &= f'(v)\bullet f'(v) - b(v,v)\bullet f(1) \\ &= f(v)^2 - b(v,v)\bullet 1_S \\ &= 0. \end{aligned}$$

QED.

2.18 Die Clifford-Algebra einer orthogonalen direkten Summe

Seien V ein K-Vektorraum mit der Bilinearform

$$b: V \times V \longrightarrow K$$

und

$$V = V' \oplus V''$$

eine orthogonale direkte Zerlegung mit zweil K-linearen Unterräumen V' und V''.
Dann ist die Clifford-Algebra von V,

$$C(V) \cong C(V')\tilde{\otimes}C(V''),$$

isomorph zum graduierten Tensorprodukt der Clifford-Algebren von V' und V'' (bezüglich der $\mathbb{Z}_2$-Graduierung der Clifford-Algebra).

Beweis. d auf der rechten Seite besitzt die Universalitätseigenschaft von C(V). Nach Bemerkung 2.15 (iv) und 2.16 stimmen die Multiplikationen auf beiden Seiten überein.
QED.

2.19 Die Clifford-Algebra von $<c_1,...,c_n>$

Seien V der K-Vektoraum mit symmetrischer Bilinearform

$$V = <c_1,...,c_n>$$

und bezeichne wie üblich

$$e_1,..., e_n \in V = K^n$$

die Standard-Basis. Dann gilt

$$C(<c_1,...,c_n>) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} Ke_{i_1}\bullet e_{i_2}\bullet ...\bullet e_{i_k}$$

wobei die Erzeuger

$$1, e_1, \ldots, e_n, \ldots, e_{i_1} \bullet e_{i_2} \bullet \ldots \bullet e_{i_k}, \ldots, e_1 \bullet \ldots \bullet e_n$$

(mit $i_1 < \ldots < i_k$) linear unabhängig sind. Weiter ist

$$e_i \bullet e_j = - e_j \bullet e_i \text{ und } e_i^2 = c_i.$$

Insbesondere ist $V = K^n = Ke_1 + \ldots + Ke_n$ ein linearer Unterraum der Clifford-Algebra, und es gilt

$$\dim C(<c_1,\ldots,c_n>) = 2^n$$

Beweis. Nach 2.18 gilt

$$C(<c_1,\ldots,c_n>) = C(<c_1>) \otimes \ldots \otimes C(<c_n>),$$

und die Berechnung von C(V) ist damit auf den 1-dimensionalen Fall reduziert.

Im Fall $V = <c>$ ist

$$T(V) = K[T]$$

der Polynomring über K in der Unbestimmten $T = e_1$ und

$$J(V)$$

ist das Ideal welches von den Elementen der Gestalt

$$v \otimes v - b(v,v) = (\lambda T)^2 - \lambda^2 c = \lambda^2 (T^2 - c)$$

mit $v = \lambda e_1$ erzeugt wird, d.h. J(V) besteht aus den Vielfachen des Polynoms $T^2 - c$,

$$J(V) = (T^2 - c)K[T].$$

Ist t die Restklasse von T, so gilt

$$C(<c>) = K + K \bullet t + K \bullet t^2 + \ldots$$

und $t^2 = c$, d.h.

$$C(<c>) = K + K \bullet t \text{ mit } t^2 = c$$

Insbesondere ist

$$\dim_K C(<c>) = 2.$$

Damit erhalten wir für $V = <c_1,\ldots,c_n>$:

$$\dim C(<c_1,\ldots,c_n>) = 2^n$$

und

$$C(<c_1,\ldots,c_n>) = \oplus_{k=0}^{n} \oplus_{i_1 < \ldots < i_k} Ke_{i_1} e_{i_2} \bullet \ldots \bullet e_{i_k}$$

QED.

Beispiel.

Für $K = \mathbb{R}$ und $V = <-1,-1>$ ist

$$C(V) = \mathbb{R} + \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_1 e_2$$

und

$e_1^2 = -1,$

$e_2^2 = -1,$

Wegen $e_2e_1 = - e_1e_2$ erhalten wir weiter

$(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = - (e_1e_1)(e_2e_2) = -1.$

Als Clifford-Algebra von <-1, -1> erhalten wir gerade die Algbra der Hamiltonschen Quaternionen.

3 Halbeinfache Ringe und Moduln

(frei nach dem 17. Kapitel von Lang [2])

3.1 Matrizen und lineare Abbildungen über nicht-kommutativen Ringen

In Kapitel XIII haben wir ausschließlich Matrizen über kommutativen Ringen betrachtet. Für unsere gegenwärtigen Ziele müssen wir eine allgemeinere Situation untersuchen.

3.1.1 Matrizen über einem Ring

Sei K ein Ring. Eine m×n-Matrix mit Einträgen aus K wird in derselben Weise definiert wie im Fall kommutativer Ringe: es ist eine endliche Familie

$$M = (c_{ij})_{i=1,...,m,j=1,...,n}$$

von m•n Elementen aus K, die man sich in rechteckiger Gestalt zu m Zeilen mit je n Elementen angeordnet denkt,

$$M = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Das Paar (m, n) heißt Typ der Matrix und wird mit

type M := (m,n)

bezeichnet. Die Zahlen m und n heißen Zeilenzahl bzw. Spaltenzahl und werden mit

$$r(M) := m \text{ und } c(M) := n$$

bezeichnen.

Die Summe und das Produkt von Matrizen werden durch dieselben Formeln definiert:

$$(c_{ij}) + (d_{ij}) := (c_{ij} + d_{ij}) \qquad \text{falls typ } (c_{ij}) = \text{typ } (d_{ij})$$

$$(c_{ij}) \bullet (d_{ij}) := \left(\sum_{\alpha=1}^{b} c_{i\alpha} \bullet d_{\alpha j}\right) \quad \text{falls } c(c_{ij}) = r(d_{ij}).$$

Bemerkungen

(i) Nach wie vor gelten die Assoziativgesetze und Distributivgesetz (falls die Typen der Matrizen so beschaffen sind, daß sich die Operationen ausführen lassen):

$(M' + M'') + M''' = M' + (M''+M''')$

$(M' \bullet M'') \bullet M''' = M' \bullet (M'' \bullet M''')$

$(M' + M'') \bullet M''' = M' \bullet M''' + M'' \bullet M'''$

$M'\bullet(M''+M''')=M'\bullet M''+M'\bullet M''')$

(ii) Die m×n-Matrizen mit Einträgen aus K

$$K^{m\times n} = \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$$

bilden sowohl einen linken als auch einen rechten K-Modul.

(iii) Die quadratischen Matrizen

$$\mathrm{Mat}_n(K) := K^{n\times n}$$

bilden einen Ring.

(iv) Es gibt einen Ring-Homomorphismus

$$K \to \mathrm{Mat}_n(K),\ c \mapsto c\cdot \mathrm{Id}$$

3.1.2 Schiefkörper

Ein <u>Schiefkörper</u> ist ein Ring mit 1 ($\neq 0$), in welchem jedes von Null verschiedene Element ein Inverses besitzt.

Bemerkungen

(i) Jeder Modul M über einem Schiefkörper K besitzt eine Basis.
(ii) Die Mächtigkeit von je zwei Basen ist gleich.
(iii) Die Mächtigkeit einer Basis heißt <u>Dimension</u> des Moduls und wird mit

$$\dim_K M$$

bezeichnet.

(iv) Moduln über K heißen auch <u>Vektorräume</u>.

(v) Eine K-lineare Abbildung $\varphi: V'\to V''$ endlich-dimensionaler K-Vektorräumen besitzt bezüglich gegebener Basen

$$v' = (v'_1,\dots,v'_{n'}) \text{ von } V' \text{ und } v'' = (v''_1,\dots,v''_{n''}) \text{ von } V''$$

eine Matrix

$$M^{v'}_{v''}(\varphi) = (c_{ij}) \in K^{n''\times n'}.$$

Die Einträge c_{ij} der Matrix sind durch die Bedingungen

$$f(v'_i) = c_{1i}v''_1+\dots+c_{n''i}v''_{n''}\quad (i=1,\dots,n')$$

bestimmt.

3.1.3 Matrizen von linearen Abbildungen zwischen direkten Summen

Seien R ein Ring,

$$\{M_i\}_{i\in I} \text{ und } \{N_j\}_{j\in J}$$

zwei endliche Familien von R-Moduln und

$$M := \oplus_{i\in I} M_i \text{ und } N := \oplus_{j\in J} N_j$$

deren direkte Summen. Dann ist die Abbildung

$$\oplus_{i\in I,j\in J} \mathrm{Hom}_R(M_i\,,N_j) \to \mathrm{Hom}_R(M\,,N) \qquad (1)$$

$$(f_{ji}:M_i \longrightarrow N_j)_{i\in I,j\in J} \mapsto ((m_i)_{i\in I} \mapsto (_{i\in I} f_{ji}(m_i))_{j\in J}$$

R-linear und bijektiv. Die Umkehrung dieser Abbildung kann man wir folgt beschreiben. Seien

$$\pi_j: N \longrightarrow N_j\,,\ (n_\alpha)_{\alpha\in J} \mapsto n_j,$$

die Projektion auf die j-te Koordinate und

$$q_i: M_i \longrightarrow M,\ x \mapsto \{\delta_{i\alpha}\bullet x\}_{\alpha\in I}$$

die natürliche Einbettung, welche M_i mit dem Teilmodul der direkten Summe identifiziert, dessen Elemente nur an der i-ten Stelle von 0 verschiedene Einträge besitzen. Die Umkehrung von (1) hat dann die Gestalt

$$\mathrm{Hom}_R(M\ , N) \longrightarrow \oplus_{i\in I, j\in J}\ \mathrm{Hom}_R(M_i\ , N_j),\ \varphi \mapsto M(\varphi) := (\pi_j\circ f\circ q_i\ )_{i\in I, j\in J}$$

Die Elemente von

$$\mathrm{Hom}_R(M\ , N)$$

sind deshalb durch die zugehörige Matrix

$$M(\varphi) = (f_{ij})_{i\in I} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{r1} & f_{r2} & \dots & f_{rs} \end{pmatrix} \text{ mit } f_{ji} = \pi_j\circ f\circ q_i: M_i \longrightarrow N_j$$

von R-linearen Abbildungen f_{ij} eindeutig bestimmt - und umgekeht definiert jede Matrix von R-linearen Abbildung $f_{ji}: M_i \longrightarrow N_j$ ein Element von $\mathrm{Hom}_R(M\ , N)$.

Die Anwendung linearen Abbildung $\varphi: M \longrightarrow N$ entspricht dabei der Matrizen-Multiplikation mit $M(\varphi)$.

$$f(m) = f\begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{r1} & f_{r2} & \dots & f_{rs} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_s \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

(i) Für jeden R-Modul M und jede natürliche Zahl hat man insbesondere einen Isomorphismus von Ringen

$$\mathrm{End}_R(M^{(n)}) \to \mathrm{Mat}_n\ (K),$$

Dabei sei

$$K := \mathrm{End}_R M$$

der Endomorphismen-Ring des R-Moduls m und

$$M^{(n)}$$

bezeichne die n-fache direkte Summe von M.

(ii) Betrachten wir den Fall, daß

$$R = D \text{ ein Schiefkörper}$$

und

$$M = D\bullet v\ ,\ v \in M - \{0\},$$

ein eindimensionaler D-Vektorrauam ist. Mit Hilfe des Basis-Vektors v, können wir M mit dem D-Vektorraum D identifizieren,

$$D \xrightarrow{\cong} M = D\bullet v,\ x \mapsto x\bullet v,$$

und K mit

$$K \cong \mathrm{End}_D\ D.$$

Eine d-lineare Abbildung f: $D \longrightarrow D$ ist durch ihren Wert an der Stelle 1 bestimmt:

$$f(x) = f(x\cdot 1) = x\cdot f(1),$$
d.h.
$$f = f_a \text{ mit } f_a(x) = x\cdot a \text{ und } a := f(1).$$
Wir erhalten so eine surjektive Abbildung
$$D \longrightarrow K = \mathrm{End}_D\, D,\ a \mapsto f_a.$$
Wegen $f_a(1) = a$ ist sie auch injektiv. Außerdem gilt

f_{a+b}	$= f_a + f_b$	(Distributivgesetz in D)[14]
f_1	$= \mathrm{Id}$	(wegen $f_1(x) = x\cdot 1 = x$)
f_{ab}	$= f_b \circ f_a$	(Assoziativgesetz in D)[15]

Mit anderen Worten, dies ist ein Anti-Isomorphismus. Dies ist im wesentlichen der einzige Unterschied zum kommutativen Fall (von Vektorräume über Körpern).

3.1.4 Einfache Moduln

Ein R-Modul M heißt <u>einfach</u>, wenn er $\ne 0$ ist und keine nicht-trivialen Teilmoduln besitzt, d.h. 0 und M sind seine einzigen Teilmoduln.

3.1.5 Proposition 1: Lemma von Schur

Seien R ein Ring und $f:M \to N$ eine R-lineare Abbildung einfacher R-Moduln. Dann ist f entweder die 0-Abbildung oder ein Isomorphismus. Der Ring $\mathrm{End}_R(M)$ ist ein Schiefkörper.

Beweis. Sei f von Null verschieden. Dann ist Ker(f) ein echter Teilmodul von M also gleich Null,
$$\mathrm{Ker}(f) = 0.$$
Außerdem ist $\mathrm{Im}(f) \subseteq N$ nicht der 0-Modul, also gleich N,
$$\mathrm{Im}(f) = N.$$
Die Abbildung f ist somit bijektiv, also ein Isomorphismus.
Jedes von Null verschiedene Element des Rings $\mathrm{End}_R(M)$ ist damit umkehrbar, d.h. der Endomorphismen-Ring ist ein Schiefkörper.
QED.

3.1.6 Proposition 2: der Endomorphismen-Ring einer direkten Summe einfacher Moduln

Seien R ein Ring, $M_1,...,M_r$ paarweise nicht-isomorphe einfache R-Moduln und
$$M = M_1^{(n_1)} \oplus ... \oplus M_r^{(n_r)}$$
Dann ist die Abbildung
$$\mathrm{Mat}_{n_1}(\mathrm{End}_R(M_1)) \times ... \times \mathrm{Mat}_{n_r}(\mathrm{End}_R(M_r)) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}_R(M)$$
$$(A_1,...,A_r) \mapsto ((m_1,...,m_r) \mapsto (A_1m_1,...,A_rm_r))$$
ein Isomorphismus von Ringen.

---

[14] $f_{a+b}(x) = x\cdot(a+b) = x\cdot a + x\cdot b = f_a(x) + f_b(x) = (f_a+f_b)(x)$

[15] $f_a(\ (x)) = f_a(x\cdot b) = x\cdot(b\cdot a) =$

$f_{a\cdot b}(x) = x\cdot a\cdot b = f_b(x\cdot a) = f_b(f_a(x)) = (f_b\circ f_a)(x)$

In jeder solchen Zerlegung eines Moduls M in eine direkte Summe endlich vieler einfacher R-Moduln sind die direkten Summanden M_i bis auf Isomorphie und deren Vielfachheiten n_i eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Abbildung ist offensichtlich additiv und multiplikativ[16], d.h. ein Ringhomomorphismus (von Ringen mit 1). Er ist weiterhin offensichtlich injektiv. Beweisen wir seine Surjektivität.

Sei $f \in End_R(M)$. Als Abbildung mit Werten in M hat f die Gestalt

$$f = (f_1, ..., f_r)$$

mit R-linearen Abbildungen

$$f_i: M \to M_i^{(n_i)}$$

Die Einschränkung von f_i auf den j-ten direkten Summanden wird durch eine Matrix beschrieben, deren Einträge R-lineare Abbildung $M_j \to M_i$ sind. Für $j \ne i$ kann es sich nicht um Isomorphismen handeln, d.h. nach 3.1.5 handelt es sich um 0-Abbildungen. Die Einschränkung von f_i auf den j-ten direkten Summanden mit $j \ne i$ ist demnach Null. Es folgt

$$f_i(m_1, ..., m_r) = (0,...,0,A_i(m_i),0,...,0) \text{ mit } A_i \in Mat_{n_i}(End_R(M_i),$$

also

$$f(m_1, ..., m_r) = (A_1 m_1, ..., A_r m_r).$$

Die Eindeutigekeitsaussage ist eine Variante des Satzes von Jordan-Hölder.

QED.

3.1.7 Vielfachheiten und Längen

In der Situation von 3.1.6 heißt die Zahl n_i Vielfachheit, mit welcher M_i im Modul

(1) $$M = M_1^{(n_1)} \oplus ... \oplus M_r^{(n_r)}$$

vorkommt. Die Zahl

$$\text{length}(M) := n_1 + ... + n_r$$

heißt Länge des Moduls M. Identiät (1) werden wir manchmal auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$M = n_1 M_1 \oplus ... \oplus n_r M_r$$

3.2 Halbeinfache Moduln

3.2.1 Vereinbarung

Sei R ein Ring. Wenn nicht explizit anders erwähnt nehmen wir in diesem Abschnitt an, daß alle Moduln R-Moduln und alle Homomorphismen R-lineare Abbildungen sind.

3.2.2 Kriterium der Halbeinfachheit

Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind folgenden Bedingungen äquivalent.

(SS1) M ist eine Summe von einfachen R-Moduln.

(SS2) M ist direkte Summe von einfachen R-Moduln.

---

[16] bezüglich von koordinatenweiser Addition und multiplikation im direkten Produkt auf der linken Seite.

(SS3) Jeder Teilmodul $N \subseteq M$ ist ein direkter Summand von M, d.h. es gibt einen Teilmodul N' mit $M = N \oplus M'$.

Bemerkungen

(i) Ein Modul M über dem Ring R heißt <u>halbeinfach</u>, wenn er den äquivalenten Bedingungen (SS1) - (SS3) benügt.[17]

(ii) Jeder von 0 verschiedene Teilmodul eines halbeinfachen Moduls einthält einen einfachen Teilmodul.

Beweis. 1. <u>Schritt</u>. Sei $M = \sum_{i\in I} M_i$ eine (nicht-notwendig direkte) Summe von einfachen Teilmoduln. Dann existiert eine Teilmenge $J \subseteq I$ derart, daß

$$M = \sum_{i\in J} M_i = \bigoplus_{i\in J} M_i.$$

gilt und die Summe direkt ist.

(Insbesondere besteht die Implikation (SS1) $\Rightarrow$ (SS2)). Sei

S

die Menge aller Teilmengen $J \subseteq I$, für welche die Summe

$$\sum_{j\in J} M_j = \bigoplus_{j\in J} M_j \tag{1}$$

direkt ist. Die Menge S ist nicht leer: alle einelementigen Teilmengen von I liegen in J. Die Menge S ist halbgeordnet bezüglich der Inklusionsrelation. Für jede linear geordnete Teilmenge von S ist die Vereinigung der Elemente dieser Teilmenge ein Element von S (weil nur endlich viele Koordinaten eines Elements einer direkten Summe ungleich 0 sind). Damit besitzt jede linear geordnete Teilmenge von S eine obere Schranke in S. Nach dem Zornschen Lemma gibt es in S ein maximales Element. Sei

J

ein solches.Es reicht zu zeigen, jedes M_i liegt in der Summe (1) (sodaß diese gleich M ist). Im Fall $i \in J$ ist das trivialerweise der Fall, sei also $i \in I - J$.

Der Durchschnitt der Summe (1) mit M_i ist ein Teilmodul von M_i, also gleich 0 der gleich M_i.

Im ersten Fall bleibt die Summe (1) direkt, wenn man i zur Menge J hinzufügt, was im Widerspruch zur Maximalität von J steht. Also tritt der erste Fall nicht ein. Im zweiten Fall liegt aber M_i in der Summe (1).

2. <u>Schritt</u>. Es besteht die Implikation (SS2) $\Rightarrow$ (SS3).

Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Bedingung (SS3) ist trivialerweise für N erfüllt, wenn N = M ist. Sei also

$N \subset M$ ein echter Teilmodul.

Sei

S

[17] Die Bezeichnungsweise (SSi), i=1,2,3 , kommt von semi-simple (Englisch für halbeinfach).

die Menge aller Teilmengen $J \subseteq I$, für welche die Summe

$$N + \sum_{j\in J} M_j = N \oplus \sum_{j\in J} M_j \qquad (2)$$

direkt ist. Weil N ein echter Teilmodul von M ist, gibt es ein M_i welches nicht in N liegt. Weil M_i einfach ist, gilt dann $N \cap M_i = 0$, d.h. die Summe $N+M_i$ ist direkt und

$$M_i \in S.$$

Die Menge S ist somit nicht leer. Dieselbe Argumentation wie im ersten Schritt zeigt, daß S ein maximales Element J enthält und für dieses maximale Element die Summe (2) gleich M ist, d.h. es gilt (SS3).

3. Schritt. Es gelte (SS3). Dann enthält jeder von 0 verschiedene Teilmodul $N \subseteq M$ einen einfachen Teilmodul (d.h. es gilt die Aussage von Bemerkung (ii)).

Sei N ein von 0 verschiedener Teilmodul von M. Wir wählen ein von 0 verschiedenes Element in N, sagen wir

$$0 \neq n \in N.$$

Wir betrachten die R-lineare Surjektion

$$R \longrightarrow R\cdot n,\ r \mapsto r\cdot n. \qquad (3)$$

Ihr Kern ist ein Linksideal von $\ell \subseteq R$, welches echt enthalten ist in R (weil die Surjektion nicht identisch 0 ist),

$$\ell \subset R \text{ echtes Linksideal.}$$

Nach dem Zornschen Lemma liegt ℓ in einem maximalen Linksideal m von R,

$$\ell \subseteq m \subset R,\ m \text{ maximales Linksideal von } R.$$

Die Surjektion (3) induziert eine R-lineare Abbildung

$$R/\ell \longrightarrow R\cdot n,\ r \bmod \ell \mapsto r\cdot n.$$

Das Bild von m/ℓ bei dieser Abbildung ist ein maximaler von $R\cdot n$ verschiedener Teilmodul

$$m\cdot n \subseteq R\cdot n,\ m\cdot n \text{ maximal unter den echten Teilmoduln von } R\cdot n.$$

Nach Voraussetzung (SS3) können wir M als direkte Summe

$$M = m\cdot n + M' = m\cdot n \oplus M'$$

schreiben mit einem Teilmodul $M' \subseteq M$. Wegen $m\cdot n \subseteq R\cdot n$ gilt

$$R\cdot n = m\cdot n + M' \cap R\cdot n = m\cdot n \oplus (M' \cap R\cdot n).$$

Für jeden von 0 verschiedenen echten Teilmodul $M'' \subseteq M' \cap R\cdot n$ wäre

$$m\cdot n + M' \cap R\cdot n$$

ein echter Teilmodul von $R\cdot n$, welcher $m\cdot n$ als echten Teilmodul enthält. Das widerspricht der Maximalitäg von $m\cdot n$ in $R\cdot n$. Also gibt es keinen solchen echten Teilmodul M'', d.h. jeder echte Teilmodul von $M' \cap R\cdot n$ ist gleich 0. Deshalb ist

$M' \cap R\cdot n$

ein einfacher Teilmodul von $R\cdot n$, also von N.

4. Schritt. Es besteht die Implikation (SS3) $\Rightarrow$ (SS1).

Sei M_0 die Summe aller einfachen Teilmoduln von M. Es reicht zu zeigen, $M_0 = M$. Angenommen, M_0 ist ein echter Teilmodul von M. Nach Voraussetzung (SS3) gibt es dann einen von 0 verschiedenen Teilmodul N mit

$$M = M_0 \oplus N, N \neq 0.$$

Nach dem dritten Schritt gibt es einen einfachen Teilmodul in N. Nach Definition von M_0 müßte dieser aber in M_0 , was der Wahl von N widerspricht (die Summe M_0+N wäre nicht direkt). Dieser Widerspruch zeigt, es muß $M = M_0$ gelten.

QED.

3.2.3 Proposition 3: Teilmoduln und Faktormoduln halbeinfacher Moduln

Jeder Teilmodul und jeder Faktormodul eines halbeinfachen Moduls ist halbeinfach.

Beweis. Seien M ein halbeinfacher R-Modul und $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Weiter sei

$$N_0$$

die Summe aller einfachen Teilmoduln von N. Nach 3.2.2 (SS3) können wir M in der Gestalt

$$M = N_0 \oplus N'_0 \qquad (1)$$

schreiben mit einem Teilmodul N'_0 von M. Jedes Element $x \in N$ besitzt dann genau eine Darstellung

$$x = x_0 + x'_0 \text{ mit } x_0 \in N_0 \text{ und } x'_0 \in N'_0.$$

Nun ist aber $x'_0 = x - x_0 \in N$, d.h. es ist $N = N_0 + N \cap N'_0$ und diese Summen-Zerlegung ist direkt (wegen (1)):

$$N = N_0 \oplus (N \cap N'_0). \qquad (2)$$

Wäre der Durchschnitt $N \cap N'_0$ ungleich 0, so würde er einen einfachen Teilmodul enthalten (auf Grund der Aussagen des dritten Schritts im Beweis von 3.2.2). Dieser einfache Teilmodul müßte aber in N_0 liegen (nach Definition von N_0), was der direkten Summenzerlegung (2) widerspricht. Dieser Widerspruch zeigt, es gilt $N \cap N'_0$, also

$$N = N_0.$$

Also ist N halbeinfach.

Wir haben noch die Halbeinfachheit von M/N zu beweisen. Dazu schreiben wir M in der Gestalt

$$M = N \oplus N'$$

mit einem Teilmodul N' von M (vgl. 3.2.2 (SS3)). Wie wir gerade gesehen haben ist jeder Teilmodul von M halbeinfach. Insbesondere ist N' halbeinfach. Die natürliche Projektion

$$M = N \oplus N' \longrightarrow N'$$

auf den zweiten direkten Summanden induziert einen Isomorphismus

$$M/N \xrightarrow{\cong} N'.$$

Deshalb ist mit N' auch M/N halbeinfach.

QED.

3.3 Dichtesatz

3.3.1 Lemma: Die Modul-Struktur über End(M)

Seien R ein Ring, M ein R-Modul und

$$K := \mathrm{End}_R(M)$$

Wir versehen M mit der K-Modul-Struktur

$$K \times M \longrightarrow M,\ (\varphi, x) \mapsto \varphi(x). \qquad (1)$$

Die Abbildung

$$R \longrightarrow \mathrm{End}_K(M),\ a \mapsto f_a, \qquad (2)$$

mit

$$f_a(x) := ax$$

ist wohldefiniert und ein Homomorphismus von Ringen mit 1.

Ist der R-Modul M hableinfach, so gibt es für jedes $\phi \in \mathrm{End}_K(M)$ und jedes $x \in M$ ein $\alpha \in R$ mit

$$\phi(x) = f_\alpha(x).$$

Beweis. 1. <u>Schritt</u>. M ist K-Modul mit der Multiplikation (1).

Als R-Modul ist M eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition. Für (1) gelten die Distributivgesetze: für $\varphi, \varphi', \varphi'' \in K$, $x, y \in M$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi \bullet (x+y) &= \varphi(x+y) \\
&= \varphi(x) + \varphi(y) \quad (\varphi \in K \text{ ist R-linear}) \\
&= \varphi \bullet x + \varphi \bullet y. \\
(\varphi' + \varphi'') \bullet x &= (\varphi' + \varphi'')(x) \\
&= \varphi'(x) + \varphi''(x) \\
&= \varphi' \bullet x + \varphi'' \bullet x.
\end{aligned}$$

Weiter gilt das Assoziativgesetz: für $\varphi', \varphi'' \in K$ und $x \in M$ gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi' \bullet \varphi'') \bullet x &= (\varphi' \circ \varphi'')(x) \\
&= \varphi'(\varphi''(x)) \\
&= \varphi' \bullet (\varphi'' \bullet x).
\end{aligned}$$

Schließlich operiert das Einselement von K wie die identische Abbildung (weil es die identische Abbildung ist).

2. <u>Schritt</u>. (2) ist ein wohldefinierter injektiver Homomorphismus von Ringen mit 1.

Für $a \in R$, $x, y \in M$ und $\varphi \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
f_a(x+y) &= a \bullet (x+y) \\
&= a \bullet x + a \bullet y \\
&= f_a(x) + f_a(y)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f_a(\varphi \bullet x) &= f_a(\varphi(x)) \\
&= a \bullet \varphi(x) \\
&= \varphi(a \bullet x) \qquad (\varphi \in K \text{ ist R-linear}) \\
&= \varphi \bullet f_a(x).
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich, f_a ist eine K-lineare Abbildung für jedes $a \in R$. Die Abbildung (2) ist damit wohldefiniert.

Bezeichnen wir die Abbildung (2) mit f,

$$f\colon R \longrightarrow \mathrm{End}_K(M),\ a \mapsto f(a) := f_a,$$

Für a, b $\in$ R und x $\in$ M gilt

$$
\begin{aligned}
f(a+b)(x) &= f_{a+b}(x) \\
&= (a+b)\cdot x \\
&= a\cdot x + b\cdot x \\
&= f_a(x) + f_b(x) \\
&= (f_a + f_b)(x) \\
&= (f(a) + f(b))(x)
\end{aligned}
$$

Weil x $\in$ M beliebig gewählt wurde, folgt

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ für } a,b \in R.$$

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
f(a\cdot b)(x) &= f_{a\cdot b}(x) \\
&= (a\cdot b)\cdot x \\
&= a\cdot(b\cdot x) \\
&= f_a(f_b(x)) \\
&= (f_a \circ f_b)(x) \\
&= (f(a)\circ f(b))(x),
\end{aligned}
$$

also

$$f(a\cdot b) = f(a)\circ f(b) \text{ für } a, b \in R$$

Schließlich ist

$$
\begin{aligned}
f(1)(x) &= f_1(x) \\
&= 1\cdot x \\
&= x
\end{aligned}
$$

also

$$f(1) = Id.$$

Wir haben gezeigt, f ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1.

3. Schritt. Beweis des verbleibenden Teils der Behauptung.

Seien x $\in$ M und $\phi \in End_K(M)$. Weil M halbeinfach ist, gibt es eine Zerlegung in eine direkte Summe

$$M = R\cdot x \oplus N$$

mit einem Teilmodul N. Sei

$$\pi: M \longrightarrow R\cdot x \ (\subseteq M)$$

die Projektion auf den ersten direkten Summanden. Als R-lineare Abbildung liegt π in

$$\pi \in K = End_R(M).$$

Weil ϕ eine K-lineare Abbildung ist, gilt

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \phi(\pi(x)) && (\pi \text{ ist die Projektion auf den direkten Summanden } R\cdot x) \\
&= \phi(\pi\cdot x) \\
&= \pi\cdot\phi(x) && (f \text{ ist K-linear und } \pi\in K) \\
&= \pi(\phi(x)) \\
&\in R\cdot x.
\end{aligned}
$$

Also gibt es ein $\alpha\in R$ mit $\alpha\cdot x = \phi(x)$.

QED.

Bemerkung

Der Dichte-Satz verallgemeinert die Aussage des obigen Lemma auf den Fall von endlich vielen vorgegebenen x.

3.3.2 Satz 1: Dichtesatz von Jacobson

Seien R ein Ring, M ein halbeinfacher R-Modul, $K = \mathrm{End}_R(M)$,

$$\phi \in \mathrm{End}_K(M),$$

ein K-linearer Endomorphismus von M und

$$m_1,\dots,m_n \in M$$

endlich viele Elemente. Dann gibt es ein $\alpha \in R$ mit

$$\phi(m_i) = \alpha\cdot m_i \text{ für } i = 1, \dots , n.$$

Beweis. Wir betrachten die durch ϕ auf einer direkten Summe von n Exemplaren von M induzierte Abbildung:

$$\phi^{(n)}: M^{(n)} \longrightarrow M^{(n)},\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto (f(x_1),\dots,\phi(x_n)).$$

Wir setzen

$$K' := \mathrm{End}_R(M^{(n)}) \cong \mathrm{Mat}_n(K).$$

Der Isomorphismus rechts ist der von Bemerkung 3.1.3 (i). Die Operation von K' auf $M^{(n)}$ wird dadurch zu einer Art Matrizen-Multiplikation: für $\xi \in K'$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in M^{(n)}$ ist

$$\xi\cdot x = M(\xi)\cdot x = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{1\alpha} x_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{2\alpha} x_\alpha \\ \dots \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{n\alpha} x_\alpha \end{pmatrix},\ M(\xi) = (\xi_{ij}) \in K^{n\times n}.$$

Nach Definition von $\phi^{(n)}$ ist

$$\phi^{(n)}(\xi\cdot x) = \begin{pmatrix} \phi(\sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{1\alpha} x_\alpha) \\ \phi(\sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{2\alpha} x_\alpha) \\ \dots \\ \phi(\sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{n\alpha} x_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{1\alpha}\phi(x_\alpha) \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{2\alpha}\phi(x_\alpha) \\ \dots \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{n\alpha}\phi(x_\alpha) \end{pmatrix} \qquad (\phi \text{ ist K-linear und } \xi_{ij} \in K)$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \phi(x_1) \\ \dots \\ \phi(x_n) \end{pmatrix}$$

$$= M(\xi)\bullet\phi^{(n)}(x)$$

$$= \xi\bullet \phi^{(n)}(x).$$

Wir haben gezeigt, $\phi^{(n)}$ ist eine K'-lineare Abbildng, d.h. es gilt

$$\phi^{(n)} \in K'.$$

Mit M ist auch $M^{(n)}$ ein halbeinfacher R-Modul. Nach Lemma 3.3.1 gibt es ein $\alpha \in R$ mit

$$\phi^{(n)}(m) = \alpha\bullet m \text{ für } m := \begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_n \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} \phi(m_1) \\ \dots \\ \phi(m_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\bullet m_1 \\ \dots \\ \supseteq\alpha\bullet m_n \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\phi(m_i) = \alpha\bullet m_i \text{ für } i = 1,\dots,n$$

QED.

3.3.3 Folgerung 1: Satz von Burnside

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und

$$R \subseteq \mathrm{End}_k(V)$$

eine k-Teilalgebra. Falls V ein einfacher R-Modul ist, so gilt $R = \mathrm{End}_k(V)$.

Beweis. 1. Schritt. $K := \mathrm{End}_R(V) = k$.

Weil R eine k-Algebra ist, d.h. $k = k \cdot 1_R$ liegt im Zentrum von R, definiert die Multiplikation mit Elementen aus k einen Homomorphismus von Ringen mit 1: Zumindest haben wir einen Homomorphismus von Ringen mit,

$$k \longrightarrow K = \mathrm{End}_R(V),\ c \mapsto f_c\ , \tag{1}$$

mit

$$f_c(v) := c \cdot v \text{ für } v \in V,$$

denn für $c \in k$, $r \in R$, $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} f_c(r \cdot v) &= c \cdot r \cdot v \\ &= r \cdot c \cdot v \quad \text{(R ist eine k-Algebra, d.h. } k = k \cdot 1_R \text{ liegt im Zentrum von R)} \\ &= r \cdot f_c(v), \end{aligned}$$

d.h. f_c ist R-linear für jedes $c \in k$. Wir können k mit seinem Bild in K identifizieren,

$$k \subseteq K.$$

Weil die Elemente von K lineare Abbildungen über R sind, kommutiert jedes Element von k mit jedem Element von K.

Weil V als R-Modul einfach ist, ist

$$K = \mathrm{End}_R(V) \text{ ein Schiefkörper}$$

(nach dem Lemma von Schur 3.1.5). Sei jetzt

$$\alpha \in K.$$

Dann ist $k[\alpha]$ nullteilerfreier kommutativer Ring mit 1 (weil K als Schiefkörper keine Nullteiler besitzt und α mit sich selbst kommutiert). Weiter gilt

$$K = \mathrm{End}_R(V) \subseteq \mathrm{End}_k(V)$$

(wegen $k \subseteq R$ ist jede R-lineare Abbildung auch k-linear). Deshalb ist K als k-linearer Unterraum von $\mathrm{End}_k(V)$ von endlicher Dimension über k. Dasselbe gilt auch für $k[\alpha]$, d.h $k[\alpha]$ ist eine endliche Körpererweiterung. Weil k algebraisch abgeschlossen ist, folgt $k[\alpha] = k$, also $\alpha \in k$. Wir haben gezeigt $K = k$.

2. <u>Schritt</u>. Beweis der Behauptung: $R = \mathrm{End}_k(V)$.

Sei $A \in \mathrm{End}_k(V)$. Wir haben zu zeigen $A \in R$. Nach dem ersten Schritt gilt $k = K$, d.h. es ist auch

$$A \in \mathrm{End}_K(V).$$

Sei

$$v_1, \dots , v_n \in V$$

eine Basis von V über k. Nach dem Dichtesatz 3.3.2 gibt es ein $\alpha \in R \subseteq End_k(V)$ mit

$$A(v_i) = \alpha \cdot v_i \text{ für } i = 1,...,n.$$

Da die Operation der k-linearen Abbildungen A, α: $V \longrightarrow V$ auf V durch deren Werte in den Elementen einer Basis vollständig festgelegt ist, gilt

$$A = \alpha \in R.$$

QED.

3.3.4 Die Operation multiplikativer Monoide $G \subseteq GL(V)$

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und

$$G \subseteq GL(V)$$

ein multiplikatives Teilmonoid[18] der allgemeinen linearen Gruppe von V. Ein G-invarianter Unterraum von V ist ein k-linearer Unterraum $W \subseteq V$ mit

$$\sigma(W) \subseteq W \text{ für jedes } \sigma \in G.$$

Der Vektorraum V heißt G-einfach, wenn es auch 0 und V selbst keinen G-invarianten Unterraum von V gibt.
Sei

$$R := k[G]$$

die k-Teilalgebra von $End_k(V)$, welche von G erzeugt wird.

Bemerkungen

(i) Weil G ein Monoid ist (d.h. $g', g'' \in G \Rightarrow g' \cdot g'' \in G$), besteht k[G] gerade aus den k-Linearkombinationen der Elemente von G,

$$k[G] = \{c_1 \cdot \sigma_1 + ... + c_r \cdot \sigma_r \mid c_i \in k, ,\sigma_i \in G, r = 1,2,3,...\}.$$

(ii) Ein k-linearer Unterraum von V ist genau dann G-invariant, wenn er k[G]-invariant ist.

(iii) Der Vektorraum V ist genau dann G-einfach, wenn er als k[G]-Modul einfach ist.

3.3.5 Folgerung 2

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und

$$G \subseteq \mathbf{GL}(V)$$

ein (multiplikatives) Teilmonoid. Ist V ein G-einfacher Vektorraum, so gilt

$$k[G] = End_k(V).$$

Beweis. Dies ist lediglich eine Umformulierte Variante des Satzes von Burnside (vgl. 3.3.3) unter Verwendung der in 3.3.4 eingeführten Terminologie.
QED.

---

[18] Ein Monoid ist eine Menge S zusammen mit einer assoziativen Abbildung $S \times S \longrightarrow S$, welche in S ein 1-Element besitzt. Die Bedingung an G bedeutet also, die Muliplikation in GL(V) führt nicht aus G heraus und die identische Abbildung liegt in G.

3.3.6 Vorbemerkungen

(i) Auch in den Fällen, in denen k nicht algebraisch abgeschlossen ist, kann man gewissen Ergebnisse formulieren. Seien allgemein A ein Ring und M ein einfacher A-Modul. Wie wir gesehen haben ist dann

$$\mathrm{End}_R(M)$$

ein Schiefkörper, den wir mit D bezeichnen werden, und M ein Vektorraum über D.

(ii) Seien R ein Ring und M ein beliebiger R-Modul. Wir sagen dann, M ist ein <u>treuer Modul</u>, wenn der Annullator des Moduls trivial ist

$$\mathrm{Ann}_A (M) := \{a\in A \mid a\bullet M = 0\} \text{ ist gleich } \{0\}.$$

(iii) In den Anwendungen wird M ein Vektorraum über einem Körper k sein, und wir werden von einem Ring-Homomorphismus

$$R \longrightarrow \mathrm{End}_k(M)$$

Gebrauch machen. Durch diesen Ring-Homomorphismus wird M zu einem R-Modul, der genau dann treu ist, wenn dieser Homomorphismus injektiv ist.

3.3.7 Folgerung 3: Satz von Wedderburn

Seien R ein Ring und M ein einfacher treuer R-Modul. Wir nehmen an, M ist endlich-dimensional als Vektorraum über dem Schiefkörper (vgl. das Lemma von Schur 3.1.5)

$$D := \mathrm{End}_R(M).$$

Dann gilt $R = \mathrm{End}_D(M)$.

Beweis. Sei $\{v_1, ... , v_n\}$ eine Vektorraum-Basis von M über D. Für ein gegebenes Element $A \in \mathrm{End}_D(M)$ gibt es dann nach 3.3.2 (Satz 1) ein Element $\alpha\in R$ mit

$$A(v_i) = \alpha\bullet v_i \text{ für } i = 1, ... , n.$$

Als D-lineare Endomorphismen von M, welche dieselben Werte in den Elementen einer D-Vektorraum-Basis haben, sind A und α damit gleich.Díe Abbildung[19]

$$R \longrightarrow \mathrm{End}_D(M),\ a \mapsto f_a, \text{ mit } f_a(x) = a\bullet x,$$

ist surjektiv. Sie ist injektiv, weil M ein treuer R-Modul ist.,

QED.

3.4 Halbeinfache Ringe

3.4.1 Definitionen

Ein Ring R heißt <u>halbeinfach</u>, wenn R als linker Modul über sich selbst halbeinfach ist und $1 \neq 0$ ist.

Ein linkes Ideal von des Rings R heißt <u>einfach</u>, wenn es als linker R-Modul einfach ist. Zwei linke Ideale von R heißen <u>isomorph</u>, wenn sie als linke R-Moduln isomorph sind. Sei R ein halbeinfacher Ring. Eine Familie

---

[19] Für $a \in R$, $\phi\in D = \mathrm{End}_R(M)$ und $x \in M$ ist

$$f_a(\phi\bullet x) = a\bullet\phi(x) = \phi(a\bullet x) \qquad (\phi \text{ ist R-linear})$$

$$= \phi\bullet f_a(x).$$

Damit ist f_a eine D-lineare Abbildung, d.h. die Abbildung $a \mapsto f_a$ ist wohldefiniert. Es ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1: für $a, b \in R$ und $x \in M$ gilt

$$f_a(f_b(x)) = a\bullet b\bullet x = f_{a\bullet b}(x)$$

$$\{\ell_i\}_{i\in I}$$

vonn linken Idealen von R heißt Repräsentantensystem für die Isomorphie-Klassen einfacher linker Ideale von R, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. Jedes ℓ_i ist als linker R-Modul einfach.
2. Keine zwei ℓ_i sind als linke R-Moduln isomorph.
3. Jedes einfache linke Ideal von R ist als R-Modul isomorph zu einem ℓ_i.

Ein Ring R heißt einfach, wenn er halbeinfach ist und je zwei einfache Linksideale von R isomorph sind.

Bemerkung
Seien R ein halbeinfacher Ring und $\{\ell_i\}_{i\in I}$ eine Familie von einfachen Linksidealen mit

$$R = \sum_{i\in I} \ell_i \ .$$

Dann ist jeder einfache R-Modul isomorph zu einem der ℓ_i. Ist R insbesondere einfach, so gibt es bis auf Isomorphie nur einen einfachen R-Modul.

Beweis.Seien M ein einfacher R-Modul und $x \in M - \{0\}$. Dann ist die R-lineare Abbildung

$$\varphi: R \longrightarrow M, r \mapsto r\bullet x,$$

nicht identisch Null. Weil M einfach ist, ist φ surjektiv. Nicht jedes der einfachen Linksideale ℓ_i liegt im Kern von φ. Sie ℓ_i eines dieser Ideale, die nicht im Kern von φ liegen. Dann ist die Einschränkung von φ auf ℓ_i,

$$\varphi|_{\ell_i} : \ell_i \longrightarrow M$$

nicht identisch 0. Weil ℓ_i und M einfach sind, ist φ ein Isomorphismus. Deshalb gilt

$$M \cong \ell_i.$$

QED.

3.4.2 Proposition 1: Moduln über halbeinfachen Ringen

Sei R ein halbeinfacher Ring. Dann ist jeder R-Modul halbeinfach.
Beweis. Jeder R-Modul ist Faktor-Modul eines freien R-Moduls. Nach 3.2.3 reicht es zu zeigen, daß freie R-Moduln halbeinfach sind. Nach 3.2.2 ist das aber der Fall.
QED.

3.4.3 Lemma: Produkte von einfachen Idealen und Moduln

Seien R ein halbeinfacher Ring, ℓ ein einfaches linkes Ideal von R und M ein einfacher R-Modul. Dann gilt

$$\ell\bullet M = 0,$$

falls ℓ und M als R-Moduln nicht isomorph sind.

Beweis. Das Produkt $\ell\bullet M$ ist ein Teilmodul von M, also gleich 0 oder gleich M. Angenommen, es gilt

$$\ell\bullet M = M.$$

Dann gibt es ein Element $m \in M$ mit

$$\ell\cdot m \neq 0.$$

Weil $\ell\cdot m$ ein Teilmodul von M ist, gilt

$$\ell\cdot m = M.$$

Die Abbildung

$$\ell \longrightarrow M,\ x \mapsto x\cdot m,$$

ist eine surjektive R-lineare Abbildung. Weil ℓ ein einfaches Ideal von R ist, muß sein Kern trivial sein. Die Abbildung

$$\ell \xrightarrow{\cong} M,\ x \mapsto x\cdot m,$$

ist somit ein Isomorphismus.
QED.

3.4.4 Satz 2: Die Struktur der halbeinfachen Ringe

Sei R ein halbeinfacher Ring. Ein Repräsentantensystem für die Isomorphie-Klassen einfacher linker Ideale für den Ring R besteht aus nur endliche vielen Linksidealen, sagen wir

$$\ell_1, \dots , \ell_s$$

Für $i = 1,...,s$ sei

$$R_i = \sum_{\ell\cong\ell_i} \ell$$

die Summe aller zu ℓ_i isomorphen Ideale. Dann ist R_i ein zweiseitiges Ideal von R und gleichzeitig ein Ring, dessen Operationen gerade die Einschränkungen der entsprechenden Operationen von R auf R_i sind. Der Ring R ist isomorph zum direkten Produkt der R_i ,

$$\prod_{i=1}^{s} R_i \xrightarrow{\cong} R\ ,\ (x_1,...,x_s) \mapsto x_1+... + x_s.$$[20]

Jedes R_i ist ein einfacher Ring. Ist e_i das Einselement von R_i, so ist das Einselement von R gerade die Summe der e_i ,

$$1 = e_1+... + e_s,$$

und es gilt

$$R_i = R\cdot e_i = e_i\cdot R$$

und

$$e_i\cdot e_j = \begin{cases} e_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. 1. Schritt. Darstellung von R als Summe der R_i.
Sei

$$\{\ell_i\}_{i\in I}$$

ein Repräsentantensystem für die Isomorphie-Klassen einfacher linker Ideale für den halbeinfachen Ring R. Wie oben angegeben sei

[20] Die Abbildung ist ein Isomorphismus von Ringen mit 1, wobei die Operationen links koordinatenweise definiert sind.

$$R_i := \sum_{\ell \cong \ell_i} \ell$$

für jedes $i \in I$ die Summe aller zu ℓ_i isomorphen einfachen Ideale von R. Aus Lemma 3.4.3 folgt

$$R_i \bullet R_j = 0 \text{ für } i \neq j. \qquad (1)$$

Diese Tatsache werden wir im folgenden ständig verwenden.
Als halbeinfacher Ring ist R die Summe seiner einfachern linken Ideale ist, d.h. es gilt

$$R = \sum_{i \in I} R_i \,. \qquad (2)$$

dabei ist jedes R_i ein Linksideal von R.

2. Schritt. Jedes R_i ist ein zweiseitiges Ideal.

Als Summe von linken Idealen ist R_i ein Linksideal. Weiter gilt

$$\begin{aligned} R_j &\subseteq R_j \bullet R && \text{(wegen } 1 \in R) \\ &\subseteq R_j \bullet R_j && \text{(nach Lemma 3.4.3)} \\ &\subseteq R_j && \text{(weil } R_j \text{ linkes Ideal ist)} \end{aligned}$$

Insbesondere ist R_j auch ein rechtes Ideal.

3. Schritt. Die Index-Menge I ist endlich, sagen wir $I = \{1,...,s\}$. Die Zerlegung des R-Moduls R in eine Summe der R_i,

$$R = \sum_{i=1}^{s} R_i = \bigoplus_{i=1}^{s} R_i \,,$$

ist direkt. Für jedes i ist $R_i = R \bullet e_i$

Wegen (2) und $1 \in R$ gilt

$$1 = \sum_{i \in I} e_i \quad \text{mit } e_i \in R_i.$$

Diese Summe ist endlich, d.h. fast alle e_i sind gleich Null. Wir können o.B.d.A. annehmen,

$$e_1,..., e_s \text{ sind ungleich 0, alle anderen } e_i \text{ sind 0,}$$

und

$$1 = e_1 + ... + e_s. \qquad (3)$$

Sei $x \in R$. Wir schreiben x in der Gestalt

$$x = \sum_{i \in I} x_i \quad \text{mit } x_i \in R_i.$$

Dann gilt

$$e_j x = e_j x_j$$

(wegen $e_j x_i \in R_j \bullet R_i = 0$ nach (i)) und

$$x_j = 1\cdot x_j = e_1\cdot x_j + ... + e_s\cdot x_j = e_j\cdot x_j = e_j\cdot x \tag{4}$$

Insbesondere ist x_j durch x und e_j eindeutigt bestimmt. Außerdem ist

$$\begin{aligned} x = 1\cdot x &= e_1\cdot x + ... + e_s\cdot x \\ &= e_1\cdot x_1 + ... + e_s\cdot x_s \\ &= x_1 + ... + x_s. \end{aligned} \tag{5}$$

Da dies für jedes $x \in R$ gilt, folgt $I = \{1,...,s\}$, d.h. I ist endlich. Weil die Summanden x_i der Zerlegung eines beliebigen Elements x in eine Summe

$$x = x_1 + ... + x_s \text{ mit } x_i \in R_i$$

eindeutig bestimmt sind, ist die Summe

$$R = \sum_{i=1}^{s} R_i = \bigoplus_{i=1}^{s} R_i$$

direkt. Wegen (1) gilt

$$R\cdot e_i = R_i\cdot e_i \subseteq R_i .$$

Die Inklusion rechts besteht dabei, weil R_i ein zweisetiges Ideal ist. Wegen (5) gilt

$$R = \sum_{i=1}^{s} R\cdot e_i \subseteq \sum_{i=1}^{s} R_i = R.$$

Es gilt also das Gleichheitszeichen. Weil die Zerlegung von R in eine Summe der R_i direkt ist, folgt

$$R\cdot e_i = R_i \text{ für jedes i.}$$

Dieselbe Rechnung mit vertauscher Reihenfolge der Faktoren zeigt

$$e_i\cdot R = R_i \text{ für jedes i.}$$

4. <u>Schritt</u>. R ist gerade das direkte Produkt der R_i. Jedes R_i ist ein Ring mit 1.
Wegen (1) gilt

$$e_i\cdot e_j = 0 \text{ für } i \neq j. \tag{6}$$

Wegen

$$\begin{aligned} e_1 + ... + e_s &= 1 \\ &= 1\cdot 1 \\ &= (e_1 + ... + e_s)\cdot(e_1 + ... + e_s) \\ &= e_1^2 + ... + e_s^2 \qquad \text{(nach (6))} \end{aligned}$$

und der Direktheit der Summenzerlegung (2) folgt

$$e_i^2 = e_i$$

Für je zwei Elemente von R, sagen wir

$$x = x_1 + ... + x_s \text{ und } y = y_1 + ... + y_s \text{ mit } x_i, y_i \in R_i$$

gilt

$$\begin{aligned} x\cdot y &= (x_1 + ... + x_s)\cdot(y_1 + ... + y_s) \\ &= x_1\cdot y_1 + ... + x_s\cdot y_s \qquad \text{(wegen (1)} \end{aligned}$$

d.h. Addition und Mulitplikation werden in $\sum_{i=1}^{s} R_i = \bigoplus_{i=1}^{s} R_i$ koordinatenweise ausgeführt.

R ist das direkte Produkt der R_i. Für y = 1 erhalten wir aus $1\bullet x = x = x\bullet 1$ für die j-ten Koordinaten

$$e_j\bullet x_j = x_j = x_j\bullet e_j ,$$

d.h. e_j spielt die Rolle des Einselements in R_j und R_j ist ein Ring mit 1.

5. Schritt. R_i ist einfach.

Nach Definition ist R_i Summe einfacher Linksideale, die alle isomorph zu ℓ_i. Deshalb ist jeder einfache R_i-Modul isomorph zu ℓ_i l. die Bemerkung von 3.4.1 und ihr Beweis). Als ist R_i einfach.

3.4.5 Satz 3: die Struktur der Moduln halbeinfacher Ringe

Sei R ein halbeinfacher Ring und M $\neq$ 0 ein R-Modul. Dann gilt mit den Bezeichnungen von 3.4.4 (Satz 2)

$$M = \bigoplus_{i=1}^{s} R_i\bullet M = \bigoplus_{i=1}^{s} e_i\bullet M$$

Der R-Teilmodul $R_i\bullet M = e_iM$ von M ist dabei gerade die Summe aller einfachen R-Teilmoduln von M, welche isomorph sind zu ℓ_i.

Beweis. Sei M_i die Summe aller einfachen Teilmoduln von M, welche zu ℓ_i isomorph sind. Ist $N \subseteq M$ ein einfacher Teilmodul von M, so gilt

$$N = R\bullet N = R_i\bullet N \tag{1}$$

für ein $i \in I$. Das erste Gleichheitszeichen gilt wegen $1 \in R$, das zweite wegen

$$R = \sum_{j=1}^{s} R_j$$

zusammen mit Lemma 3.4.3 und weil eines der Produkte $R_j\bullet N$ ungleich 0 sein muß.

Wäre N nicht isomorph zu ℓ_i so wäre $R_i\bullet N = 0$ nach Lemma 3.4.3. Mit (1) ist also

$$\ell_i \cong N.$$

Zusammen erhalten wir für jeden einfachen R-Modul

$$R_i\bullet N = \begin{cases} N \text{ für } N\cong\ell_i \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Weil M als halbeinfacher R-Modul die Summe seiner einfachen Moduln ist, folgt

$$R_i\bullet M = M_i.$$

und

$$M = R\bullet M = (\sum_{j=1}^{s} R_j)\bullet M = \sum_{j=1}^{s} R_j\bullet M$$

Wegen $R_j = R\bullet e_j = e_j\bullet R$ ist

$$R_j\bullet M = e_j\bullet R\bullet M = e_j\bullet M.$$

Zusammen ist also

$$M = \sum_{i=1}^{s} R_i \cdot M = \sum_{i=1}^{s} e_i \cdot M$$

Wegen

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} e_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind die Summen direkt.

QED.

3.5 Einfache Ringe

3.5.1 Endomorphismen von R sind Linkstranslationen

Seien R ein Ring und $\psi \in \mathrm{End}_R(R)$ ein R-linearer Endomorphismus des R-Moduls R.

Dann gibt es ein Element $\alpha \in R$ mit

$$\psi(x) = x \cdot \alpha \text{ für jedes } x \in R.$$

Beweis. Für jedes $x \in R$ ist

$$\psi(x) = \psi(x \cdot 1) = x \cdot \psi(1).$$

Die Aussage ist richtig mit $\alpha := \psi(1)$.
QED.

3.5.2 Satz 4: Eigenschaften von einfachen Ringen

Sei R ein einfacher Ring. Dann gelten die folgenden Aussagen.
(i) R ist eine endliche direkte Summe von einfachen Linksidealen.
(ii) R besitzt außer 0 und R keine zweiseitigen Ideale.
(iii) Sind ℓ' und ℓ'' zwei einfache Linksideale von R, so gibt es ein $\alpha \in R$ mit

$$\ell'' = \ell' \cdot \alpha.$$

(iv) Für jedes einfache Linksideal ℓ von R gilt

$$\ell \cdot R = R.$$

Beweis. Zu (i). Weil R nach Definition ein halbeinfacher Ring ist, ist R eine direkte Summe von einfachen Linksidealen, sagen wir

$$R = \bigoplus_{j \in J} \ell_j .$$

Wir können dann das Einselement als endliche Summe von Elementen aus den ℓ_j schreiben, sagen wir

$$1 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \text{ mit } \beta_j \in \ell_j - \{0\}.$$

Es gilt

$$R = R \cdot 1 = \bigoplus_{j=1}^{m} R \cdot \beta_j = \bigoplus_{j=1}^{m} \ell_j .$$

Das rechte Gleichheitszeichen gilt wegen

$$R \cdot \beta_j = \ell_j ,$$

denn es gilt $\beta_j \in \ell_j$, ℓ_j ist ein einfaches Linksideal und $R \bullet \beta_j$ ein von 0 verschiedener Teilmodul.

Zu (iii). Seien ℓ' und ℓ'' zwei einfache Linksideal von R. Weil R ein einfacher Ring ist, sind sie isomorph als R-Modul. Sei

$$\sigma: \ell' \xrightarrow{\cong} \ell''$$

ein R-linearer Isomorphismus. Weil R als Modul über sich selbst halbeinfach ist, ist ℓ' ein direkter Summand von R, sagen wir

$$R = \ell' \oplus N'.$$

Sei

$$\pi: R \longrightarrow \ell', (x,y) \mapsto x,$$

die Projektion auf den ersten direkten Summanden. Dies ist eine R-lineare Surjektion. Die Zusammensetzung mit dem Isomorphismus σ,

$$\sigma \circ \pi: R \longrightarrow \ell'' \ (\subseteq R)$$

können wir als R-linearen Endomorphismus $R \longrightarrow R$ ansehen. Nach 3.5.1 gibt es ein $\alpha \in R$ mit

$$(\sigma \circ \pi)(x) = x \bullet \alpha \text{ für jedes } x \in R.$$

Nach Definition ist die Einschränkung von π auf ℓ' die identische Abbildung. Deshalb ist die Einschränkung von $\sigma \circ \pi$ auf ℓ' gerade der Isomorphismus σ. Insbesondere ist

$\sigma \circ \pi|_{\ell'}: \ell' \longrightarrow \ell''$, $x \mapsto (\sigma \circ \pi)(x) = x \bullet \alpha$,

nicht identisch Null. Als R-lineare Abbildung zwischen einfachen R-Moduln ist dies ein Isomorphismus, d.h. es ist

$$\ell'' = \ell' \bullet \alpha.$$

Zu (iv). Nach (iii) liegt in $\ell \bullet R$ jedes einfache Linksideal von R, also auch die Summe dieser einfachen Ringsideale, also auch R.

Zu (ii). Sei $I \subseteq R$ ein von 0 verschiedenes zweiseitiges Ideal. Dann gibt es ein einfaches Linksideal ℓ von R, welches ganz in I liegt

$$\ell \subseteq I.$$

(vgl.Bemerkung 3.2.2 (ii)). Weil I ein zweiseitigen Ideal ist, gilt nach (iv)

$$R = \ell \bullet R \subseteq I \subseteq R,$$

also $I = R$.

QED.

3.5.3 Folgerung: Treue der einfachen Moduln

Seien R ein einfacher Ring, ℓ ein einfaches Linksideal von R und M ein einfacher R-Modul. Dann gilt

$$\ell \bullet M = M$$

und M ist ein treuer R-Modul.

Beweis. Nach 3.5.2 gilt

$$\ell \bullet M = \ell \bullet (R \bullet M) = (\ell \bullet R) \bullet M = R \bullet M = M.$$

Sei $\alpha \in R$ ein Element mit

$$\alpha \bullet M = 0.$$

Dann gilt

$$0 = R \bullet \alpha \bullet M = R \bullet \alpha \bullet R \bullet M.$$

Nun ist $R\bullet\alpha\bullet R$ ein zweiseitigen Ideal von R, d.h. $R\bullet\alpha\bullet R$ ist gleich R oder gleich 0. Der erste Fall kann nicht eintreten, denn dann wäre $0 = R\bullet M = M$, im Widerspruch dazu, daß M ein einfacher R-Modul sein soll. Also gilt $R\bullet\alpha\bullet R = 0$. Insbesondere ist

$$\alpha = 0.$$

Wir haben gezeigt, jeder einfache R-Modul ist treu.
QED.

3.5.4 Satz 5 (Satz von Rieffel)

Seien R ein Ring, der außer 0 und R keine zweiseitigen Ideale besizt,

$$\ell \subseteq R$$

ein von 0 verschiedenes linkes Ideal von R und

$$R' := \mathrm{End}_R(\ell),\ R'' := \mathrm{End}_{R'}(\ell).$$

Dann ist die natürlichen Abbildung

$$\lambda: R \longrightarrow R'',\ a \mapsto f_a,$$

mit $f_a(x) = ax$ ein Isomorphismus.

Beweis. Der Kern von λ ist ein echtes zweiseitiges Ideal von R, also 0. Deshalb ist λ injektiv.
Weil $\ell\bullet R$ ein von 0 verschiedenes zweiseitiges Ideal ist, gilt $\ell\bullet R = R$, also

$$\lambda(\ell)\bullet\lambda(R) = \lambda(R). \tag{1}$$

Für beliebige $x,y \in \ell$ und $f \in R''$ gilt

$$f(xy) = f(x)\bullet y, \tag{2}$$

denn die Multiplikation von rechts mit $y \in \ell$ ist ein R-linearer Endomorphismus von ℓ, und f kommutiert als Element von R” mit solchen Endomorphismen. Die Identität (2) können wir auch in der folgenden Gestalt schreiben

$$f(\lambda(x)(y) = \lambda(f(x))(y) \text{ für alle } x, y \in \ell \text{ und alle } f\in R''$$

d.h.

$$f\bullet\lambda(x) = \lambda(f\bullet x) \text{ für } x \in \ell \text{ und } f \in R''.$$

d.h. $R''\bullet\lambda(\ell) \subseteq \lambda(\ell)$. Damit ist $\lambda(\ell)$ ein linkes Ideal von R”. Damit gilt

R''	$= R''\bullet\lambda(R)$	(wegen $1 \in R$)
	$= R''\bullet\lambda(\ell)\bullet\lambda(R)$	(wegen (1))
	$= \lambda(\ell)\bullet\lambda(R)$	(weil $\lambda(\ell)$ ein Linksideal ist)
	$= \lambda(R)$	(wegen (1)).

Damit ist auch die Surjektivität von λ bewiesen.
QED.
Bemerkungen

(i) Ist der Ring R in 3.5.4 halbeinfach, so ist für R die Zahl der einfachen direkten Faktoren R_i gleich 1 (vgl. 3.4.4 Satz 2), d.h. R ist ein einfacher Ring.

(ii) Ist außerdem auch ℓ ein einfaches Linksideal, so ist R’ ein Schiefkörper und R bekommt die Gestalt eines Endomorphismen-Rings eines endlich-dimensionalen Vektorraums über diesem Körper. Der nachfolgende Satz ist eine Art Umkehrung dieser Aussage.

3.5.5 Satz 6: Matrizen-Algebren sind einfach

Seien D ein Schiefkörper, V eine endlich-dimensionaler D-Vektorraum und

$$R = \mathrm{End}_D(V).$$

Dann ist R ein einfacher Ring und V ist ein einfacher R-Modul. Außerdem gilt

$$D = \mathrm{End}_R(V).$$

Beweis. 1. <u>Schritt</u>. V ist ein treuer und einfacher R-Modul.

Sei $v \in V - \{0\}$. Der Vektor v ist ein Teil einer D-Vektorraum-Basis von V.

Insbesondere gibt es für jedes $w \in V$ eine D-lineare Abbildung

$$\alpha \in R = \mathrm{End}_D(V)$$

mit $\alpha(v) = w$. Damit enthält V keinen R-invarianten Unterraum außer 0 und V selbst. Mit anderen Worten, V ist als R-Modul einfach.

Ist $\alpha \in R$ ein Element aus dem Annullator von V in R, so gilt $\alpha(v) = 0$ für jedes $v \in V$, d.h. α ist die 0-Abbildung, d.h. das 0-Element von R. Der R-Modul V ist somit treu.

2. <u>Schritt</u>. R ist ein einfacher Ring.

Sei

$$v_1,\dots,v_m \in V$$

eine D-Vektorraum-Basis von V. Dann ist die Abbildung

$$R \longrightarrow V^{(m)},\ \alpha \mapsto (\alpha(v_1),\dots, \alpha(v_m)),$$

von R in die m-fache direkte Summe von V ist injektiv und R-linear. Für jedes

$$(w_1,\dots,w_m) \in V^{(m)}$$

gibt es ein $\alpha \in R$ mit $\alpha(v_i) = w_i$ für alle i. Die Abbildung ist ein R-linearer Isomorphismus. Als R-Modul über sich selbst ist R eine direkte Summe von Exemplaren des einfachen R-Moduls V. Damit ist R halbeinfach, und da bis auf Isomorphie nur ein einfacher R-Modul (nämlich V) in der direkten Summe vorkommt ist R ein einfacher Ring.

3. <u>Schritt</u>. $D = \mathrm{End}_R(V)$.

Der Vektorraum V ist als D-Modul halbeinfach (weil V direkte Summe eindimensionaler Unterräume ist und 1-dimensionale D-Vektorräume als D-Moduln einfach sind). Wir können deshalb den Dichtesatz 3.3.2 anwenden (mit R und D vertauscht): für

$$\varphi \in \mathrm{End}_R(V) \text{ und } v \in V-\{0\}$$

gibt es ein $a \in D$ mit $\varphi(v) = a\bullet v$.

Sei $w \in V$. Es gibt dann ein $f \in R = \mathrm{End}_D(V)$ mit $f(v) = w$, also

$$\begin{aligned}
\varphi(w) &= \varphi(f(v)) \\
&= f(\varphi(v)) && (\varphi \text{ ist R-linear und } f \in R) \\
&= f(av) && (\text{nach Wahl von a}) \\
&= a\bullet f(v) && (f \in R = \mathrm{End}_D(V) \text{ ist D-linear und } a \in D) \\
&= a\bullet w && (\text{nach Wahl von f}).
\end{aligned}$$

Da dies für jedes $w \in V$ gilt, ist $\varphi = f_a$ gerade die Multiplikation mit a von links, d.h. jedes vorgegebene φ aus $\mathrm{End}_R(V)$ liegt im Bild der natürlichen Abbildung

$$D \longrightarrow \mathrm{End}_R(V),\ a \mapsto f_a \text{ , mit } f_a(x) = ax.$$

Die natürliche Abbildung ist surjektiv. Sie ist injektiv weil sie nicht identisch 0 ist und D als Schiefkörper keine zweiseitigen Ideale außer 0 und D besitzt.

QED.

3.5.6 Satz 7: Die Zahl der Linksideale in einer Zerlegung von $\mathrm{Mat}_m(k)$

Seien k ein Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum,

$$m := \dim_k V$$

und

$$R := \mathrm{End}_k(V).$$

Dann ist R ein k-Vektorraum der Dimension

$$\dim_k R = m^2.$$

Außerdem ist m die Zahl der einfachen Linksideale, die in einer Zerlegung von R in eine direkte Summe solcher Ideale auftritt.

Beweis. Der Raum der k-linearen Endomorphismen von V läßt sich mit dem Raum der n×n-Matrizen mit Einträgen aus k identifizieren, d.h. es gilt

$$\dim_k R = m^2.$$

Auf der anderen Seite ist R also R-Modul isomorph zu einer m-fachen direkten Summe $V^{(m)}$ von Exemplaren von V (vgl. 2.Schritt im Beweis von 3.5.5 Satz 6). Der verbleibende Teil der Behauptung ergibt sich aus der Eindeutigkeitsaussage von 3.1.6 Proposition 2.

QED.

3.5.7 Eine explizite Zerleung von $\mathrm{Mat}_m(k)$ in Linksideale

In der Terminologie von 3.1 ist die Zahl m von 3.5.6 Satz 7 gerade die Länge des Rings R.

Wir können

$$R = \mathrm{End}_k(V)$$

mit Hilfe einer Basis von V mit dem Matrizenring

$$\mathrm{Mat}_m(k)$$

identifizieren. In diesem Fall können wir als einfache Linksideale ℓ_i (i = 1,...,m) die Ideale verwenden, deren Matrizen nur in der i-ten Spalte von 0 verschiedene Einträge besitzen.

Wir sehen unmittelbar, daß R die direkte Summe der m Spalten ist.

3.5.7 Das Zentrum eines vollen Matrizen-Rings

Kommutiert die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_m(k)$ mit allen anderen Matrizen von $\mathrm{Mat}_m(k)$, so ist A eine Skalar-Matrix.

Beweis. Seien $V = k^n$ und $R = \mathrm{End}_k(V)$. Dann können wir die Matrix A als R-linearen Endomorphismus von V betrachten. Nach 3.5.5 Satz 6 (mit D = k) liegt jeder solche Endomorphismus in k.

QED.

Bemerkung

Der Beweis dieser Aussage durch direktes Rechnen ist auch nicht schwer.

Index

—A—

additive Kategorie, 31
additiver Funktor, 32
Algebra
äußere, 60
Clifford, 65
Erzeugendensystem einer, 50
symmetrische, 52

Tensor-, 44
Algebra, 44

—Ä—

äußere Algebra, 60
äußere Potenz, 63

—B—

Basis eines Moduls, 21

—C—

Clifford-Algebra, 65

—D—

Dimension, 71
direkte Summe, 31
direktes Produkt, 31

—E—

einfach, 73
einfacher Ring, 85
einfacher Vektorraum bezüglich eines Monoids, 83
einfaches Ideal, 84
Einsteinsche Summenkonvention, 25
Erzeugendensystem einer Algebra, 50
exakte Sequenz
kurze, 35
exakte Sequenz, 35
exakter Funktor, 35
Exaktheit an einer Stelle, 35

—F—

flacher Modul, 35
Funktor
additiver, 32
Funktor
exakter, 35

—G—

graduiertes Tensorprodukt von Algebren, 66
Graduierung
Z-2-Graduierung, 66
Z-Graduierung, 66

—H—

halbeinfacher Modul, 75
halbeinfacher Ring, 84
homogene Elemente des Grades n, 44
homogener Bestandteil, 44
Homomorphie-Satz, 11

—I—

Ideal
einfaches, 84
Ideal, 51
invarianter Unterraum eines Monoids, 83
isomorphe Ideale, 84

—K—

Kategorie
additive, 31
Kokern, 8
kontravarianter Tensor, 24
Koordinaten eines Tensors, 23
Koordinaten eines Tensors, 23
kovarianter Tensor, 24
kurze exakte Sequenz, 35

—L—

Länge, 74

—M—

Matrix, 70
Produkt von, 70
Spaltenzahl, 70
Summe von, 70
Typ einer, 70
Zeilenzahl, 70
Modul
flacher, 35
halbeinfacher, 75
treuer, 84
Monoid
einfacher Vektorraum bezüglich eines, 83
invarianter Unterraum eines, 83

—N—

natürliche Einbettung, 45
natürliche Injektion einer direkten Summe, 31
natürliche Projektion eines direkten Produkts, 32
Null-Objekt, 32

—P—

Potenz
äußere, 63
symmetrische, 57
Produkt
direktes, 31
Produkt
Tensor-, 11
Produkt von Matrizen, 70

—R—

rechtsexakt, 38
Repräsentantensystem für die Isomorphie-Klassen einfacher linker Ideale, 85
Ring
einfacher, 85

—S—

Satz
Homomorphie-, 11

Schiefkörper
    Vektorraum über einem, 71
Schiefkörper, 71
Sequenz
    exakte, 35
    kurze exakte, 35
Spaltenzahl einer Matrix, 70
Struktur-Homomorphismus, 44
Summe
    direkte, 31
Summe von Matrizen, 70
symmetrische Algebra, 52
symmetrische Potenz, 57

—T—

Tensor, 11
Tensor, 24
Tensor-Algebra, 44
Tensorpotenz, 24
Tensorprodukt
    graduiertes, von Algebren, 66
    von Algebren, 66
Tensorprodukt, 11
treuer Modul, 84
Typ einer Matrix, 70

—U—

Universalitätseigenschaft, 9
Universalitätseigenschaft, 8
universell, 9
Unterraum
    invarianter eines Monoids, 83

—V—

Vektorraum über einem Schiefkörper, 71
Vereinbarung
    alle Moduln sind R-Moduln & alle Homomorphismen sind R-lineare Abbildungen, 74
Vielfachheit, 74

—Z—

Zeilenzahl einer Matrix, 70

Inhalt

LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN (ANHÄNGE) 1

BEZEICHNUNGEN 1

LITERATUR 3

ANHÄNGE 7

1 DAS TENSORPRODUKT 7

1.0 Vorbemerkungen 8

1.1 Beispiel für eine Universalitätseigenschaft 8

1.2 Definition des Tensorprodukts zweier A-Moduln 11

1.3 Eindeutigkeit des Tensorprodukts bis auf Isomorphie 12

1.4 Ein Erzeugendensystem für $V \otimes W$ 13

1.5 Eigenschaften des Tensorprodukts von Moduln 14

1.6 Eigenschaften des Tensorprodukts von Elementen 20

1.7 Die Koordinaten eines Tensors 22

1.8 Das Verhalten der Koordinaten bei Basiswechsel 23

1.9 Bemerkungen zum den Tensoren der Physik 24

1.10 Die Existenz des Tensorprodukts 26

1.11 Die Funktorialität des Tensorprodukts 29

1.12 Additive Kategorien und Funktoren 31

1.13 Exake Funktoren von Modul-Kategorien und flache Moduln 35

1.14 Kriterium füx exake Funktoren 36

1.15 Halbexaktheit des Tensorprodukts 38

2 DIE TENSOR-ALGEBRA UND EINIGE ANWENDUNGEN 43

2.1 Definition 43

2.2 Die Tensor-Algebra eines A-Moduls 44

2.3 Die Universalitätseigenschaft der Tensorpotenz $M^{\otimes n}$ 46

2.4 Die Universalitätseigenschaft der Tensor-Algebra 48

2.5 Eigenschaften der Tensoralgebra 50

2.6 Das von einer Menge erzeugte Ideal 51

2.7 Der Faktorraum nach einem Ideal 52

2.8 Die symmetrische Algebra 52

2.9 Die Universalitätseigenschaft der symmetrischen Algebra 53

2.10 Eigenschaften der symmetrischen Algebra 54

2.11 Vergleich mit den Polynom-Algebren 55

2.12 Die äußere Algebra 59

2.13 Die Universalitätseigenschaft der äußeren Algebra 60

2.14 Vergleich mit den Graßmann-Algebren 61

2.15 Die Clifford-Algebra 65

2.16 Das Tensorprodukt graduierter Algebren 66

2.17 Die Universalitätseigenschaft der Clifford-Algebra 67

2.18 Die Clifford-Algebra einer orthogonalen direkten Summe 68

2.19 Die Clifford-Algebra von $<c_1,...,c_n>$ 68

3 HALBEINFACHE RINGE UND MODULN 70

3.1 Matrizen und lineare Abbildungen über nicht-kommutativen Ringen 70
3.1.1 Matrizen über einem Ring 70
3.1.2 Schiefkörper 71
3.1.3 Matrizen von linearen Abbildungen zwischen direkten Summen 71
3.1.4 Einfache Moduln 73
3.1.5 Proposition 1: Lemma von Schur 73
3.1.6 Proposition 2: der Endomorphismen-Ring einer direkten Summe einfacher Moduln 73
3.1.7 Vielfachheiten und Längen 74

3.2 Halbeinfache Moduln 74
3.2.1 Vereinbarung 74
3.2.2 Kriterium der Halbeinfachheit 74
3.2.3 Proposition 3: Teilmoduln und Faktormoduln halbeinfacher Moduln 77

3.3 Dichtesatz 77
3.3.1 Lemma: Die Modul-Struktur über End(M) 77
3.3.2 Satz 1: Dichtesatz von Jacobson 80
3.3.3 Folgerung 1: Satz von Burnside 81
3.3.4 Die Operation multiplikativer Monoide G é GL(V) 83
3.3.5 Folgerung 2 83
3.3.6 Vorbemerkungen 84
3.3.7 Folgerung 3: Satz von Wedderburn 84

3.4 Halbeinfache Ringe 84
3.4.1 Definitionen 84
3.4.2 Proposition 1: Moduln über halbeinfachen Ringen 85
3.4.3 Lemma: Produkte von einfachen Idealen und Moduln 85
3.4.4 Satz 2: Die Struktur der halbeinfachen Ringe 86
3.4.5 Satz 3: die Struktur der Moduln halbeinfacher Ringe 89

3.5 Einfache Ringe 90
3.5.1 Endomorphismen von R sind Linkstranslationen 90
3.5.2 Satz 4: Eigenschaften von einfachen Ringen 90
3.5.3 Folgerung: Treue der einfachen Moduln 91
3.5.4 Satz 5 (Satz von Rieffel) 92
3.5.5 Satz 6: Matrizen-Algebren sind einfach 92
3.5.6 Satz 7: Die Zahl der Linksideale in einer Zerlegung von $Mat_m(k)$ 94
3.5.7 Eine explizite Zerleung von $Mat_m(k)$ in Linksideale 94
3.5.7 Das Zentrum eines vollen Matrizen-Rings 94

INDEX 94

INHALT 96